ସରଳ ଗଣିତ

(ବୀଜଗଣିତ)

MD3PF6

ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀ

ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷା ନିର୍ଦ୍ଦେଶାଳୟ ଏବଂ
ରାଜ୍ୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ପ୍ରଶିକ୍ଷଣ ପରିଷଦ,
ଓଡ଼ିଶା, ଭୁବନେଶ୍ୱର

ଓଡ଼ିଶା ବିଦ୍ୟାଳୟ ଶିକ୍ଷା କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମ ପ୍ରାଧିକରଣ,
ଭୁବନେଶ୍ୱର

ସରଳ ଗଣିତ (ବୀଜଗଣିତ)

ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀ

ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ :

ଡ. ପ୍ରସନ୍ନ କୁମାର ଶତପଥି (ସମୀକ୍ଷକ)

ଡ. ରଜନୀ ବଲ୍ଲଭ ଦାଶ

ଶ୍ରୀ ନଗେନ୍ଦ୍ର କୁମାର ମିଶ୍ର

ଶ୍ରୀମତୀ କୁମୁଦିନୀ ଜେନା

ଶ୍ରୀ କୈଳାସ ଚନ୍ଦ୍ର ସ୍ୱାଇଁ

ସଂଶୋଧନ :

ଶ୍ରୀ ମଦନ ମୋହନ ମହାନ୍ତି

ଶ୍ରୀ ନାରାୟଣ ସାହୁ

ଶ୍ରୀ ମାନସ ମିଶ୍ର

ଶ୍ରୀ କାର୍ତ୍ତିକ ଚନ୍ଦ୍ର ବେହେରା

ସଂଯୋଜନା :

ଡ. ନଳିନୀକାନ୍ତ ମିଶ୍ର

ଡ. ତିଲୋତ୍ତମା ସେନାପତି

ଡ. ସବିତା ସାହୁ

ପ୍ରକାଶକ :

ବିଦ୍ୟାଳୟ ଓ ଗଣଶିକ୍ଷା ବିଭାଗ, ଓଡ଼ିଶା ସରକାର

ପ୍ରକାଶକ:

ବିଦ୍ୟାଳୟ ଓ ଗଣଶିକ୍ଷା ବିଭାଗ

ଓଡ଼ିଶା ସରକାର

ମୁଦ୍ରଣ ବର୍ଷ :

୨୦୧୮, ୨୦୧୯

ପ୍ରସ୍ତୁତି :

ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷା ନିର୍ଦ୍ଦେଶାଳୟ ଏବଂ ରାଜ୍ୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ପ୍ରଶିକ୍ଷଣ ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା, ଭୁବନେଶ୍ୱର

ଓ

ଓଡ଼ିଶା ରାଜ୍ୟ ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରଣୟନ ଓ ପ୍ରକାଶନ ସଂସ୍ଥା, ଭୁବନେଶ୍ୱର

ମୁଦ୍ରଣ : ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ଉତ୍ପାଦନ ଓ ବିକ୍ରୟ, ଓଡ଼ିଶା, ଭୁବନେଶ୍ୱର

ଏହି ପୁସ୍ତକ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଦେ

ଆଜିର ଯୁଗ ହେଉଛି ବିଜ୍ଞାନ ଓ ପ୍ରଯୁକ୍ତି ବିଦ୍ୟାର ଯୁଗ । ତାତ୍ତ୍ୱିକ ଓ ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ – ଏ ଉଭୟ ଦିଗରେ ବିଜ୍ଞାନର ଅଗ୍ରଗତି ନିମନ୍ତେ ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ଏକ ବଳିଷ୍ଠ ଭୂମିକା ରହିଛି । ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ବୀଜଗଣିତ ହେଉଛି ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍ଗ । ବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ତରରୁ ବୀଜଗଣିତ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଏକ ଉପଯୁକ୍ତ ଭିତ୍ତିଭୂମି ଉପରେ ପ୍ରତିଷ୍ଠିତ ହେବା ବାଞ୍ଛନୀୟ ।

ସାରା ବିଶ୍ୱରେ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବିକାଶଶୀଳ ଦେଶମାନଙ୍କ ଭଳି ଭାରତ ମଧ୍ୟ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉଲ୍ଲେଖନୀୟ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଛି । ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷାସ୍ତର ପାଇଁ ଜାତୀୟ ସ୍ତରରେ ପ୍ରସ୍ତୁତ National Curriculum Frame Work - 2005 ରେ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାକୁ ଅଧିକ ଗୁରୁତ୍ୱ ଦିଆଯାଇଛି । ତଦନୁଯାୟୀ ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ତାଲିମ ପରିଷଦ (NCERT), ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ଓ ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରଣୟନ କରିଛନ୍ତି । ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷାସ୍ରୋତକୁ ଦୃଷ୍ଟି ଦେଇ ଓଡ଼ିଶା ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ; ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷା ନିର୍ଦ୍ଦେଶାଳୟ ଏବଂ ରାଜ୍ୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ପ୍ରତିଷ୍ଠାନ ଓ ପ୍ରଶିକ୍ଷଣ ପରିଷଦ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରସ୍ତୁତ ରାଜ୍ୟ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଆଧାରରେ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀ ପାଇଁ ସିଲାବସ୍ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିଥିଲେ ଓ ତଦନୁଯାୟୀ ନୂତନ ଭାବରେ **ସରଳ ଗଣିତ (ବୀଜଗଣିତ)** ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶ କରିଛନ୍ତି । ଅଭିଜ୍ଞ ଲେଖକମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ରଚନା କରାଯାଇ ପୁସ୍ତକର ପାଣ୍ଡୁଲିପିକୁ ରାଜ୍ୟସ୍ତରୀୟ ଏକ କର୍ମଶାଳାରେ କାର୍ଯ୍ୟରତ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କଦ୍ୱାରା ପୁଙ୍ଖାନୁପୁଙ୍ଖ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ସିଲାବସ୍ କମିଟିରେ ମଧ୍ୟ ପାଣ୍ଡୁଲିପିଟି ପଠିତ ଓ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି । ଆଲୋଚନା ଲବ୍ଧ ପରାମର୍ଶକୁ ପାଥେୟ କରି ପାଣ୍ଡୁଲିପିଟି ସଂଶୋଧିତ ହୋଇଛି ।

ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷା ନିର୍ଦ୍ଦେଶାଳୟ ଏବଂ ରାଜ୍ୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ପ୍ରତିଷ୍ଠାନ ଓ ପ୍ରଶିକ୍ଷଣ ଏହି ପୁସ୍ତକଟିର ଆବଶ୍ୟକୀୟ ସଂଶୋଧନ ପାଇଁ ଗଣିତ ବିଶାରଦ ଓ କାର୍ଯ୍ୟରତ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ୨୦୧୪ ମସିହାରେ ପ୍ରୟାସ କରିଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଏହା ହୋଇ ନଥିଲା । ୨୦୧୬ ମସିହାରେ ଏହି ପୁସ୍ତକର ସଂଶୋଧନ କାର୍ଯ୍ୟ କରାଯାଇଛି । ତଥାପି ତଥ୍ୟଗତ ତ୍ରୁଟି ଯଦି ରହିଥାଏ, କର୍ତ୍ତୃପକ୍ଷଙ୍କୁ ଜଣାଇବେ ।

ସୂଚୀପତ୍ର

ଅଧ୍ୟାୟ	ବିଷୟ	ପୃଷ୍ଠା
ପ୍ରଥମ	ସେଟ୍	1
ଦ୍ୱିତୀୟ	ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା	9
ତୃତୀୟ	ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଓ ଅଭେଦ	36
ଚତୁର୍ଥ	ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ	60
ପଞ୍ଚମ	ସୂଚକ ତତ୍ତ୍ୱ	68
ଷଷ୍ଠ	ବର୍ଗ-ବର୍ଗମୂଳ ଏବଂ ଘନ-ଘନମୂଳ	76
ସପ୍ତମ	ସମୀକରଣ ଓ ଏହାର ସମାଧାନ	101
ଅଷ୍ଟମ	ବ୍ୟାବସାୟିକ ଗଣିତ	112
ନବମ	ଚଳନ	145
ଦଶମ	ତଥ୍ୟ ପରିଚାଳନା ଏବଂ ଲେଖଚିତ୍ର	156
	ଉତ୍ତରମାଳା	183

ସେଟ୍ (SET)

ଅଧ୍ୟାୟ 1

MDCKGT

1.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ବିଖ୍ୟାତ ଜର୍ମାନ ଗଣିତଜ୍ଞ **ଜର୍ଜ କ୍ୟାଣ୍ଟର (Georg Cantor),** (1845-1918) ହେଉଛନ୍ତି ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ (Set Theory) ର ପ୍ରବର୍ତ୍ତକ । ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ ଗଣିତକୁ ସରଳ ଓ ସୁନ୍ଦର କରିବାରେ ମୁଖ୍ୟ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଛି । ଏହା ମାଧ୍ୟମରେ ଜଟିଳ ଗାଣିତିକ ତତ୍ତ୍ୱକୁ ସାବଲୀଳ ଢଙ୍ଗରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରାଯାଇପାରୁଛି । ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ମୂଳଦୁଆକୁ ସୁଦୃଢ଼ କରିବା ସହ ଗଣିତର ବିଭିନ୍ନ ବିଭାଗଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧକୁ ଦୃଢ଼ୀଭୂତ କରିପାରିଛି ।

1.2 ସେଟ୍ ଓ ଏହାର ଉପାଦାନ (Set and its elements) :

ଆମେ ଅନେକ ସମୟରେ କଥା ପ୍ରସଙ୍ଗରେ ଚାବିନେଡ଼ା, ଛାତ୍ରଦଳ, ଗୋରୁପଲ, ତାରକାପୁଞ୍ଜ, କ୍ରିକେଟ୍ ଟିମ୍ ଆଦି କହିଥାଉ । ଏଠାରେ ନେଡ଼ା, ଦଳ, ପଲ, ପୁଞ୍ଜ, ଟିମ୍ ଆଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଗୋଷ୍ଠୀ (collection) ବା ସମାହାର (aggregate) । ସେହିପରି ବାସନ ସେଟ୍ ଓ ସୋଫାସେଟ୍ କହିଲେ ଆମେ ଯଥାକ୍ରମେ ବାସନର ସମାହାର ଓ ସୋଫାର ସମାହାରକୁ ବୁଝିଥାଉ । ତେଣୁ ଯେକୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ (well defined) ବସ୍ତୁମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଏକ ସେଟ୍‌ର ପରିକଳ୍ପନା କରାଯାଏ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ :

(i) ଓଡ଼ିଶାର ଜିଲ୍ଲାସମୂହ
(ii) ଇଂରାଜୀ ଭାଷାର ବର୍ଣ୍ଣମାଳା
(iii) ସପ୍ତାହର ଦିନଗୁଡ଼ିକ
(iv) ବାଘ, ଭାଲୁ, ସିଂହମାନଙ୍କ ଦଳ
(v) ସେଓ, ଅଙ୍ଗୁର, କମଳା, ନଡ଼ିଆ ଫଳସମୂହ
(vi) ଆଳୁ, ବାଇଗଣ, କଖାରୁ, କୋବି ପରିବାସମୂହ
(vii) ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାସମୂହ
(viii) ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା 2,4,6,8.....ସମୂହ

ଏହି ସମାହାରକୁ ନେଇ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସେଟ୍‌ର ପରିକଳ୍ପନା କରାଯାଇ ପାରିବ ।

ଯେଉଁ ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ସେଟ୍‌ଟି ଗଠିତ, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ସେଟ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ **ଉପାଦାନ (Element)** କୁହାଯାଏ । ଓଡ଼ିଶାର ଜିଲ୍ଲାସମୂହରେ ପୁରୀ, କଟକ, ବାଲେଶ୍ୱର, ସମ୍ବଲପୁର, ଫୁଲବାଣୀ ଆଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନ । ସେହିପରି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ର 1,2,3..... ଆଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନ ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ (i) ଇଂରାଜୀ ଭାଷାର ବର୍ଣ୍ଣମାଳାରେ ଥିବା ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।
(ii) ଏକ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।

ସେଟ୍ ଗଠନ କରିବା ସମୟରେ ଆମକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ ରଖିବାକୁ ହେବ ଯେ କୌଣସି ଦତ୍ତବସ୍ତୁ ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ କି ନୁହେଁ, ତାହା ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଭାବରେ ସ୍ଥିରୀକୃତ କରାଯାଇ ପାରୁଥିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ 'ସୁନ୍ଦର ଫୁଲ' ମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଏକ ସେଟ୍ ଗଠନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । କାରଣ ସୌନ୍ଦର୍ଯ୍ୟର ଏପରି କିଛି ମାପକାଠି ନାହିଁ, ଯାହା ଦ୍ୱାରା ଆମେ କେଉଁ ଫୁଲଟି ସୁନ୍ଦର ଓ କେଉଁ ଫୁଲଟି ସୁନ୍ଦର ନୁହେଁ, ତାହା ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ କହିପାରିବା । ସେହିପରି ''ବୃହତ୍ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା''ମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଏକ ସେଟ୍ ଗଠନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । କାରଣ କେଉଁ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ବୃହତ୍, ତାହାର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଉପାୟ କହି ହେବ ନାହିଁ । ସୁତରାଂ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଭାବେ ସ୍ଥିରୀକୃତ ହୋଇ ନ ଥିବା ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ନେଇ ସେଟ୍ ଗଠନ ଅସମ୍ଭବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ – ମନେରଖ ଯେ ସେଟ୍ ଓ ଏହାର ଉପାଦାନର କୌଣସି ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ । ଏହି ଦୁଇଟି ପଦ ସଂଜ୍ଞା ବିହୀନ ଅଟନ୍ତି ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ (i) ପାଞ୍ଚଟି ବିଭିନ୍ନ ସେଟ୍‌ର ଉଦାହରଣ ଦେଇ, ସେମାନଙ୍କର ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।
(ii) ଦୁଇଟି ଉଦାହରଣ ଦିଅ, ଯାହାକୁ ନେଇ ସେଟ୍ ଗଠନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

1.3 ସସୀମ ଓ ଅସୀମ ସେଟ୍ (Finite and Infinite Sets) :

ଯଦି କୌଣସି ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ଗୋଟି ଗୋଟି କରି ଗଣିଲେ, ଗଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପରିସମାପ୍ତି ଘଟେ, ତେବେ ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌ଟି ଏକ ସସୀମ ସେଟ୍ ଅଟେ; ଅନ୍ୟଥା ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌କୁ ଅସୀମ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଇଂରାଜୀ ଭାଷାର ବର୍ଣ୍ଣମାଳାମାନଙ୍କର ସେଟ୍, ଏକ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସସୀମ ସେଟ୍; କିନ୍ତୁ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍ ଗୋଟିଏ ଅସୀମ ସେଟ୍ ଅଟେ ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ : ଦୁଇଟି ସସୀମ ସେଟ୍ ଓ ଦୁଇଟି ଅସୀମ ସେଟ୍‌ର ଉଦାହରଣ ଦିଅ ।

1.4 ସେଟ୍‌ର ଲିଖନ (Presentation of Sets) :

ସାଧାରଣତଃ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ଇଂରାଜୀ ବର୍ଣ୍ଣମାଳାର ବଡ଼ ଅକ୍ଷର A,B,C,D... ଆଦି ଦ୍ୱାରା ନାମକରଣ କରାଯାଏ ଓ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଛୋଟ ଅକ୍ଷର a,b,c,d.. ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଯଦି ସେଟ୍ A ର ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନ 'a' ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଆମେ ଲେଖିବା **$a \in A$ ଏବଂ ଏହାକୁ 'a belongs to A'** ବା **'a is an element of A'** ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ । b, A ର ଏକ ଉପାଦାନ ହୋଇ ନ ଥିଲେ, **$b \notin A$** ଲେଖାଯାଏ । ଏହାକୁ **b, A ର ଉପାଦାନ ନୁହେଁ (b does not belong to A କିମ୍ବା b is not an element of A)** ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ ।

ସେଟ୍ ଲେଖିବା ପାଇଁ ଦୁଇପ୍ରକାର ପଦ୍ଧତି ଅବଲମ୍ବନ କରାଯାଏ । ଯଥା:

(a) ତାଲିକା ପଦ୍ଧତି ବା ସାରଣୀ ପଦ୍ଧତି (Tabular or Roster method)

(b) ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତି ବା ସେଟ୍ ଗଠନକାରୀ ପଦ୍ଧତି (Formula or Set builder method)

(a) ତାଲିକା ପଦ୍ଧତି : ଏକ ଯୋଡ଼ା କୁଟୀଳ ବନ୍ଧନୀ { } ମଧ୍ୟରେ ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ସେଟ୍‌ଟି ଗଠିତ, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଗୋଟିକ ପରେ ଗୋଟିଏ ରଖାଯିବ ଓ ପ୍ରତି ଉପାଦାନ ପରେ (,) କମା ଦିଆଯିବ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ଯଦି A ସେଟ୍ ସପ୍ତାହର ବାରମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ, ତେବେ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଏହାକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଏ ।

A = {ସୋମବାର, ମଙ୍ଗଳବାର, ବୁଧବାର, ଗୁରୁବାର, ଶୁକ୍ରବାର, ଶନିବାର, ରବିବାର} । ଯଦି B ସେଟ୍‌ଟି ଏକ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ଗଣନ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ସେଟ୍ ହୁଏ, ତେବେ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିବା,

B = {1, 4, 9}

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ A ଓ B ଉଭୟ ସେଟ୍ ସସୀମ ସେଟ୍ ।

କିନ୍ତୁ ଆମେ ଯଦି ଏକ ଅସୀମ ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିବା, ତେବେ ପ୍ରଥମେ ଏହାର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକର ଅନୁକ୍ରମ (sequence) କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକରି ଅତିକମ୍‌ରେ ତିନୋଟି ଉପାଦାନ ଲେଖି ଅବଶିଷ୍ଟ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ପାଇଁ କିଛି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇଦେବା । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ :

ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍ **N**={1,2,3,.....}

ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍ **Z** ={0, ± 1, ± 2,.....} ଅଥବା **Z** ={....–2, –1, 0, 1, 2,.....}

ମନେରଖ : (i) କୌଣସି ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିବା ବେଳେ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଯେ କୌଣସି କ୍ରମରେ ଲେଖିଲେ ମଧ୍ୟ ସେଟ୍‌ଟି ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହେ । ଯଥା :

{a, b, c} = {b, a, c} = {c, a, b} = {a, c, b}

(ii) ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ଲେଖିଲା ବେଳେ ଯଦି କୌଣସି ଉପାଦାନ ଏକାଧିକ ବାର ଲେଖାଥାଏ, ତେବେ ସେହି ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ସେଟ୍‌ରେ ଥରେ ମାତ୍ର ଲେଖାଯିବ । ଯଥା:

{1, 2, 3, 3, 2} = {1, 2, 3}

(b) ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତି :

କେତେକ ସେଟ୍ ଅଛନ୍ତି, ଯେଉଁମାନଙ୍କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିବା ଅସମ୍ଭବ ବା ଅତ୍ୟନ୍ତ କଷ୍ଟସାଧ୍ୟ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ସମସ୍ତ ଭାରତୀୟମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖି ହେବ ନାହିଁ । ଏହିପରି ଅନେକ ଉଦାହରଣ ପାଇପାରିବା । ମାତ୍ର ଏ ସମସ୍ତ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖି ପ୍ରକାଶ କରିବା ସହଜ ଅଟେ । ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ ଯଦି ସମସ୍ତ ଭାରତୀୟଙ୍କ ସେଟ୍‌ଟି S ରୂପେ ସୂଚିତ, ତେବେ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିବା –

S = {x | x, ଜଣେ ଭାରତୀୟ }

କିମ୍ବା S = {x : x, ଜଣେ ଭାରତୀୟ}

ଏଠାରେ '|' କିମ୍ବା ':' କୁ **ଯେପରିକି (such that)** ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ ଓ ବନ୍ଧନୀ ଅନ୍ତର୍ଗତ ଉକ୍ତିକୁ ସମସ୍ତ x ମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଯେପରିକି x ଜଣେ ଭାରତୀୟ' ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ମନେରଖ ' ଯେପରିକି ' ପରେ ଥିବା ଉକ୍ତିଟି x ର ଏକ ଧର୍ମ ଅଟେ । ଏଠାରେ S ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ ସେହି ସମସ୍ତ ବ୍ୟକ୍ତି ଯେଉଁମାନେ ଭାରତୀୟ ଅଟନ୍ତି ।

ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଓ ସମସ୍ତ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍ N ଓ Z କୁ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା ।

N = {x | x ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା}

Z = {x | x ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା}

ପୁନଶ୍ଚ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ସେଟ୍ P = {2,4,6,8...} ହେଲେ, ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ସେଟ୍ P = {x | x =2n, n ∈ **N**} ଲେଖାଯିବ । କାରଣ ସେଟ୍ Pର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ଧନାତ୍ମକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

ଅପରପକ୍ଷେ ଯଦି ଏକ ସେଟ୍ B={x | x = 2n, n ∈ **N** ,n≤ 5} କୁ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖାଯାଇଥାଏ ତେବେ ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ B = {2,4,6,8,10} ଭାବେ ଲାଖାଯିବ ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ

(i) ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିପାରିବା କି ? (a) **N** ସେଟ୍ (b) **Z** ସେଟ୍

(ii) **N, Z** ଏବଂ **Q** ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ସସୀମ ନା ଅସୀମ ସେଟ୍ ?

(iii) ଉପରୋକ୍ତ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଏପରି ଏକ ସେଟ୍‌କୁ ବାଛ, ଯାହାକୁ ଉଭୟ ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖାଯାଇ ପାରିବ ।

ଉଦାହରଣ - 1 : ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ପ୍ରକାଶିତ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(i) $S = \{-1, 1\}$ (ii) $P = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ ଏବଂ (iii) $T = \{-1, -2, -3, ...)$

ସମାଧାନ : (i) $S = \{x \mid x^2 = 1\}$ (ii) $P = \{x \mid x = 3n, n \in \mathbf{N}, n \leq 5\}$ (iii) $T = \{-x \mid x \in \mathbf{N}\}$

ଉଦାହରଣ – 2 : ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(i) $A = \{ x \mid x \in \mathbf{N}, \ 5 \leq x \leq 10\}$ (ii) $B = \{ x \mid x = 2n, n \in \mathbf{N}, x \leq 5\}$

ଏବଂ (iii) $C = \{ x \mid x = 3^n, n \in \mathbf{N}\}$

ସମାଧାନ :

(i) ଏଠାରେ A ର ଉପାଦନ ଗୁଡ଼ିକ 5 ଓ 10 ତଥା ଏମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା । ସୁତରାଂ

$A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(ii) ଏଠାରେ B ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଯାହାକି 5 ଠାରୁ ସାନ ।

$B = \{2, 4\}$

(iii) ଏଠାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦନ 3^n , $n \in \mathbf{N}$ । ଅତଏବ ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକ 3, 9, 27, 81, ... ଇତ୍ୟାଦି ।

$\therefore C = \{3, 9, 27, 81, ...\}$ । ଏହି ସେଟ୍‌ଟି ଏକ ଅସୀମ ସେଟ୍ ।

ଉଦାହରଣ - 3 : ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ସସୀମ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ବାଛ ।

(i) $A = \{ x \mid x^2 = 1\}$ (ii) $B = \{-x \mid x \in \mathbf{N}\}$

(iii) $C = \{ x \mid x \in 2^n, n \in \mathbf{N}\}$ (iv) $D = \{ x \mid x \in \mathbf{Z}, -5 < x < 5\}$

ସମାଧାନ : ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିଲେ,

(i) $A = \{1, -1\}$ (ii) $B = \{-1, -2, -3, ...\}$

(iii) $C = \{2, 4, 8, 16, ...\}$ (iv) $D = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

ଏଥି ମଧ୍ୟରୁ A ଓ D ସସୀମ ସେଟ୍ ।

1.5 ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ (Empty Set) :

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଶୂନ '0' ଯେପରି ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଥାଏ, ଠିକ୍ ସେହିପରି ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍‌ର ଭୂମିକା ମଧ୍ୟ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ।

ସଂଜ୍ଞା: ଯେଉଁ ସେଟ୍‌ରେ କୌଣସି ଉପାଦାନ ନ ଥାଏ, ସେହି ସେଟ୍‌କୁ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ । ଶୂନ୍ୟସେଟ୍‌କୁ ϕ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ϕ ର ଏକ ବିକଳ୍ପ ରୂପ { } ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, (i) $A = \{ x \mid x \neq x \} = \phi$ ଅର୍ଥାତ୍ A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ନିଜ ସହ ସମାନ ନୁହେଁ । ତେଣୁ ଏହା ଏକ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ । କାରଣ ଏପରି କୌଣସି ବସ୍ତୁ ନାହିଁ, ଯାହାକି ନିଜ ସହ ସମାନ ନୁହେଁ ।

(ii) $B = \{ x \mid x \in \mathbf{N} \ 1 < x < 2\} = \phi$

B ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ 1 ଓ 2 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା କିନ୍ତୁ 1 ଓ 2 ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ନ ଥିବା ହେତୁ B ଏକ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ।

1.6 ଉପସେଟ୍ (Subset) :

A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଯଦି A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ B ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ସେଟ୍ A କୁ ସେଟ୍ B ର ଏକ ଉପସେଟ୍ କୁହାଯାଏ (A is a subset of B) । ସଂକେତରେ ଏହାକୁ $A \subset B$ ଲେଖାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ମନେକର $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ତେବେ $A \subset B$

କାରଣ A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ B ସେଟ୍‌ରେ ଅଛି ।

A, B ର ଏକ ଉପସେଟ୍ ହୋଇଥିଲେ, B କୁ A ର **ଅଧିସେଟ୍ (superset)** କୁହାଯାଏ । ସଂକେତରେ ଏହାକୁ $B \supset A$ ଲେଖାଯାଏ ।

ମନେରଖ : (i) ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍ ନିଜର ଉପସେଟ୍ ଅଟେ ଅର୍ଥାତ୍,

ଯଦି A ଏକ ସେଟ୍, ତେବେ $A \subset A$ । ସେହିପରି $\phi \subset \phi$ ।

କାରଣ A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ସେହି ସେଟ୍ A ର ମଧ୍ୟ ଏକ ଉପାଦାନ ।

(ii) ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍‌ରେ କୌଣସି ଉପାଦାନ ନ ଥିବା ହେତୁ ତାହା ଯେକୌଣସି ସେଟ୍‌ର ଏକ ଉପସେଟ୍

ଅର୍ଥାତ୍, ଯଦି S ଗୋଟିଏ ସେଟ୍, ତେବେ $\phi \subset S$ ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ

(i) ଦୁଇଟି ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍‌ର ଉଦାହରଣ ଦିଅ । (ଆଲୋଚିତ ଉଦାହରଣ ବ୍ୟତୀତ)

1.7 ସେଟ୍ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Set Operations) :

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ଯେପରି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପ୍ରକ୍ରିୟା, ଠିକ୍ ସେହିପରି ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସଂଯୋଗ, ଛେଦ ଓ ଅନ୍ତର ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପ୍ରକ୍ରିୟା । ଆମେ ଏଠାରେ ସେଟ୍ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡ଼ିକ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

(a) ସଂଯୋଗ (Union) :

A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ଉପାଦାନକୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଓ B ର ସଂଯୋଗ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହା $A \cup B$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ । $A \cup B$ ମଧ୍ୟ ଏକ ସେଟ୍ ।

ସୂତ୍ର ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲେଖିବା : $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ବା $x \in B\}$ ।

ଏଠାରେ **$x \in A$ ବା $x \in B$ ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି x ଉପାଦାନଟି A କିମ୍ବା B କିମ୍ବା ଉଭୟ A ଓ B ର ଉପାଦାନ ଅଟେ ।** ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ

ଯଦି $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, ତେବେ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ପୁନଶ୍ଚ $S = \{a, b, c\}$, $T = \{b, c\}$, ତେବେ $S \cup T = \{a, b, c\}$

(b) ଛେଦ (Intersection) :

A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟରେ ଥିବା ଉପାଦାନମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଉଭୟ A ଓ B ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ହୋଇଥିବେ, ସେହିମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଓ B ର ଛେଦ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହା $A \cap B$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ।

ସୂତ୍ର ପ୍ରଣାଳୀରେ $A \cap B = \{x \mid x \in A$ ଏବଂ $x \in B\}$

ଏଠାରେ **$x \in A$ ଏବଂ $x \in B$ ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି, A ଓ B ଉଭୟ ସେଟ୍‌ର x ହେଉଛି ଏକ ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ (Common element)** । ଦତ୍ତ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ମନେକର A= {1, 2, 3}, B = {1, 3, 5}, ତେବେ $A \cap B = \{1, 3\}$

ସେହିପରି S = {a,b,c}, T = {p, q, r}, ତେବେ $S \cap T = \phi$ ଅଥବା $S \cap T = \{\ \}$

କାରଣ S ଓ T ଉଭୟ ସେଟ୍‌ରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ନାହିଁ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମେ S ଓ T ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟକୁ **ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ (Disjoint sets ବା Non-intersecting sets)** ବୋଲି କହିବା ।

(c) ଅନ୍ତର (Difference) :

ଯଦି A ଓ B ଦୁଇଟି ସେଟ୍, ତେବେ A ସେଟ୍‌ର ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ B ସେଟ୍‌ରେ ନାହାନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଅନ୍ତର B ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହା A – B ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ।

ସୂତ୍ର ପ୍ରଣାଳୀରେ $A - B = \{x \mid x \in A$ ଏବଂ $x \notin B\}$ । ସେହିପରି $B - A = \{x \in B$ ଏବଂ $x \notin A\}$ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ମନେକର A = {1, 2, 3, 4} , B = {3, 4}, ତେବେ A –B = {1, 2} ଏବଂ $B - A = \phi$

ତୁମ ପାଇଁ କାମ

1. ମନେକର A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {2, 4, 6}

   ତେବେ $A \cup B$, $A \cap B$, A – B ଏବଂ B – A ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର:

   $A \cup A$ = ..., $A \cap A$ = ..., A –A = ...

   $A \cup \phi$ = ..., $A \cap \phi$ = ..., $A - \phi$ = ...

1.8 ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର (Venn Diagram) :

ସେଟ୍, ଉପସେଟ୍ ଓ ସେଟ୍ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ସହଜରେ ବୁଝିବା ପାଇଁ ଆମେ ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱରେ ଚିତ୍ରର ସାହାଯ୍ୟ ନେଇଥାଉ । ଏହାକୁ **ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର** କୁହାଯାଏ । ପ୍ରଥମେ ଏହି ଚିତ୍ରର ଧାରଣା ଦେଇଥିଲେ ବିଶିଷ୍ଟ ଇଂରେଜ ତର୍କ ଶାସ୍ତ୍ରବିତ୍ **ଜନ୍ ଭେନ୍ (John Venn) (1834 - 1883)** । ଚିତ୍ରରେ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କୁ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ର ବା ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ର ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଇଥାଏ । ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଥିବାର ଧାରଣା କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ

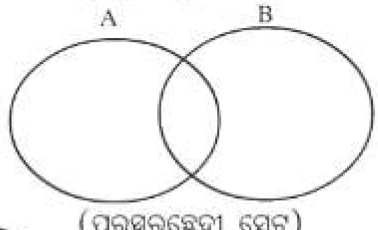
(i) S = {l, m, n} ସେଟ୍‌ର ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଦର୍ଶାଯାଇଅଛି ।

S = {l, m, n} (ଚିତ୍ର 1.1)

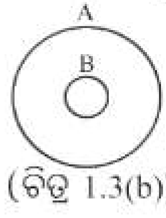
(ii) ଯଦି ଦୁଇଟି ସେଟ୍ A ଓ B ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ହୋଇଥାନ୍ତି, ତେବେ ଏହାର ଭେନ୍‌ଚିତ୍ରକୁ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

(ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍)
(ଚିତ୍ର 1.2) $A \cap B = \phi$

ଯଦି A ସେଟ୍‌ର କିଛି ଉପାଦାନ B ସେଟ୍‌ରେ ଥାଆନ୍ତି, ତେବେ ଏହାର ଭେନ୍‌ଚିତ୍ରକୁ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



(ପରସ୍ପରଛେଦୀ ସେଟ୍)
(ଚିତ୍ର 1.3(a))

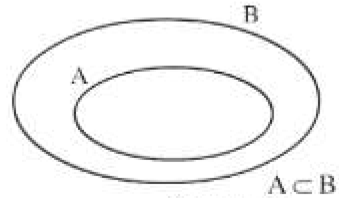


(ଚିତ୍ର 1.3(b))

$B \subset A$ (b) (B, A ର ଏକ ଉପସେଟ୍)

(iii) ଦୁଇଟି ସେଟ୍ A ଓ B ମଧ୍ୟରୁ ଯଦି $A \subset B$ ହୋଇଥାଏ,

ତେବେ ଉକ୍ତ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ରକୁ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



(ଚିତ୍ର 1.4)

ପୂର୍ବ ବର୍ଣ୍ଣିତ ସେଟ୍ ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଭେନ୍ ଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଇ ପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ -4 :

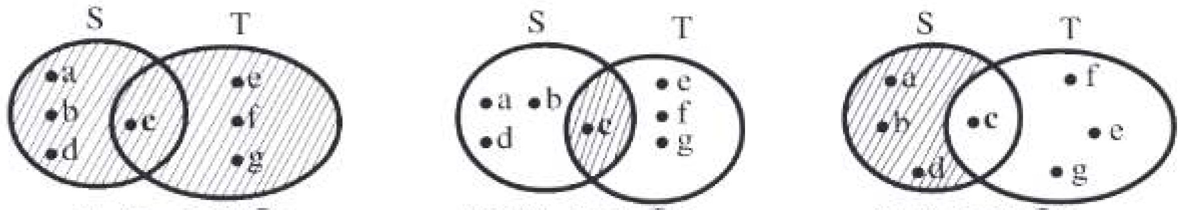
ଯଦି $S = \{a, b, c, d\}$ ଓ $T = \{c, e, f, g\}$ ହୁଏ,

ତେବେ $S \cup T$, $S \cap T$ ଓ $S - T$ ନିର୍ଣ୍ଣୟକରି ପ୍ରତ୍ୟେକର ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

(a) $S \cup T = \{a, b, c, d\} \cup \{c, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

(b) $S \cap T = \{a, b, c, d\} \cap \{c, e, f, g\} = \{c\}$

(c) $S - T = \{a, b, c, d\} - \{c, e, f, g\} = \{a, b, d\}$



(S ∪ T) ରେଖାଙ୍କିତ (a) | (S ∩ T) ରେଖାଙ୍କିତ (b) | (S – T) ରେଖାଙ୍କିତ (c)

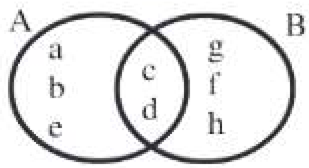
(ଚିତ୍ର 1.5)

ଉଦାହରଣ -5 : ଦତ୍ତ ଭେନ୍ ଚିତ୍ରରୁ $A \cup B$, $A \cap B$ ଓ $A - B$ କୁ ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲେଖ ।

ସମାଧାନ : $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$,

$A \cap B = \{c, d\}$

$A - B = \{a, b, e\}$



(ଚିତ୍ର 1.6)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ହେଲେ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ଲାଗି T ଓ ଭୁଲ ଉକ୍ତି ଲାଗି F ଲେଖ ।

(i) $3 \in A$ (ii) $5 \in A$ (iii) $4 \notin A$

(iv) $7 \notin A$ (v) $\{3\} \in A$ (vi) $\{3\} \subset A$

(vii) $3 \subset A$ (viii) $\{3, 4\} \in A$ (ix) $\{3, 4\} \subset A$

(x) $\{1, 2, 3, 4\} \in A$ (xi) $\{1, 2, 3, 4\} \subset A$

2. $\subset, \supset, =, \in, \notin$ ସଙ୍କେତମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଉପଯୁକ୍ତ ସଂକେତ ବାଛି ନିମ୍ନସ୍ଥ ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ଗୁଡ଼ିକ ପୂରଣ କର ।

(i) a .... {a, b, c} (ii) {a} ..... {a, b , c} (iii) {c, a, b} .... {a, b, c}

(iv) d .... {a, b , c} (v) {b, c} ..... {a, c , b} (vi) (a, b, c} ...... {a, b}

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(i) $\{x \mid x \in \mathbf{N}$ ଓ $1 < x < 10\}$ (ii) $\{2n \mid n \in \mathbf{N}$ ଓ $n \leq 4\}$

(iii) {n | n ଏକ ଯୁଗ୍ମ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା} (iv) {x | x ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା, $x \in \mathbf{N}$ ଓ $x < 10$}

(v) {x | x ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା $-5 \leq x < 4$} (vi) {x | x ଏକ ସପ୍ତାହର ଗୋଟିଏ ଦିନ}

(vii) {x | x ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା, $2 < x < 3$} (viii) {x | $x = 2^n$ $n \in \mathbf{N}$ ଏବଂ $5 \leq x \leq 27$}

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କୁ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(i) {1, 3, 5, 7, 9, 11} (ii) {a, e, i, o, u} (iii) {–2, –1, 0, 1, 2}

(iv) {2, 3, 5, 7, 11, 13} (v) {2, 4, 6, 8, 10....} (vi) {3, 6, 9, 12, 15}

(vii) {5, 25, 125, 625} (viii) {a, b, c, ...z} (ix) {2, 4, 8, 16,32...}

5. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଶବ୍ଦମାନଙ୍କର ବ୍ୟବହୃତ ଅକ୍ଷରମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଲେଖ ।

(i) mathematics (ii) arithmetic

(iii) programme (iv) committee

6. ଯଦି $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ଏବଂ $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ହୁଏ, ତେବେ $A \cup B$ ଓ $A \cap B$ କୁ ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲେଖ ।

7. ଯଦି $\{x \mid x \in N$ ଏବଂ $1 < x \leq 6\}$ ଏବଂ $B = \{x \mid x \in N$ ଏବଂ $4 < x \leq 10\}$ ହେଲେ, $A \cup B$ ଏବଂ $A \cap B$ କୁ ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲେଖ ।

8. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ଏବଂ $B = \{2, 3, 5\}$ ଏବଂ $C = \{2, 4, 6\}$ ହେଲେ, ନିମ୍ନୋକ୍ତ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cap C$ (iii) $B \cap C$ (iv) $A \cup C$ (v) $B \cup C$ (vi) $A \cap B$

9. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ରରୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

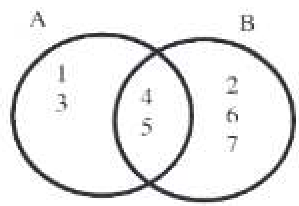
(i) ସେଟ୍ A ଓ ସେଟ୍ B କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(ii) $A \cap B$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(iii) $A \cup B$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(iv) $A - B$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(v) $B - A$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।



(ଚିତ୍ର 1.7)

10. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଭେନ୍ ଚିତ୍ରରୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

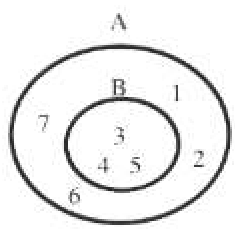
(i) ସେଟ୍ A ଓ B ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(ii) $A \cap B$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(iii) $A \cup B$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(iv) $A \cup \phi$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(v) $A \cap \phi$ କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।



(ଚିତ୍ର 1.8)

11. $A = \{a, b, c, d\}$ $B = \{c, d, e, f\}$ ହେଲେ

(a) $A - B$ ଓ $B - A$ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(b) $(A - B) \cup (B - A)$ ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(c) $(A - B) \cap (B - A)$ ସେଟ୍‌କୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

*****

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା
(RATIONAL NUMBERS)

ଅଧ୍ୟାୟ 2

MDLGIG

2.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (Rational Numbers) ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ପୂର୍ବରୁ ଆସ ଆମେ ପୂର୍ବଶ୍ରେଣୀରେ ପାଠ୍ୟକ୍ରମରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ବା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା, ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ବିଷୟରେ ସଂକ୍ଷେପରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

2.1.1 ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ବା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (Natural Numbers) :

ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ମଣିଷର ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନ ଓ ଜୀବିକାର ପ୍ରଥମେ ଯେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ସମୂହ ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇଥିଲା ତାହା ହେଲା ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ବା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ।

ଏହି ସଂଖ୍ୟାସମୂହର ସେଟ୍‌କୁ N ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଏ । **N = {1, 2, 3, 4...}**

2.1.2 ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (Extended Natural Numbers) :

ମନେକର ତୁମ ପାଖରେ 10 ଟଙ୍କା ଅଛି ।

ତୁମେ ଗୋଟିଏ 10 ଟଙ୍କା ମୂଲ୍ୟର ପେନ୍ କିଣିଲ । ତୁମ ପାଖରେ ଆଉ କେତେ ଟଙ୍କା ରହିଲା ? ତୁମ ପାଖରେ ଯେତେ ଟଙ୍କା ରହିଲା ତାହା ହେଉଛି 0 ଟଙ୍କା ।

ଏହା ଭାରତୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞମାନଙ୍କର ଅବଦାନ ବୋଲି ଦୃଢ଼ ମତ ପୋଷଣ କରାଯାଏ । ଗଣନ ପଦ୍ଧତିରେ ଏହାର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାରକୁ ଭିତ୍ତିକରି ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ଏହାକୁ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ସାମିଲ କରାଯାଇ ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌କୁ **ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ (Extended Natural Number Set)** ବୋଲି ନିଆଗଲା । ଏହି ସଂଖ୍ୟା ସମୂହକୁ N* ବା W ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଏ । **N* = {0, 1, 2, 3, 4...}**

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : {0,1, 2, 3...} ସେଟ୍‌କୁ ମଧ୍ୟ ସାମଗ୍ରିକ ସଂଖ୍ୟାସେଟ୍ (Whole Number Set) କୁହାଯାଏ ।

2.1.3 ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା (Integers) :

ପୂର୍ବବର୍ଣ୍ଣିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ । କେତେକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରିସ୍ଥିତିରେ ସଂଖ୍ୟା ଭିତ୍ତିକ ଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ପାଇଁ କିପରି ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ନୁହେଁ ଆସ, ତାହା ଜାଣିବା ।

ମନେକର ତୁମ ପାଖରେ 10 ଟଙ୍କା ଅଛି । ତୁମର ଗୋଟିଏ 11 ଟଙ୍କା ମୂଲ୍ୟର କଲମ କିଣିବାକୁ ଅଛି । ତୁମ ପାଖରେ ଥିବା ଟଙ୍କା ଏଥିପାଇଁ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ନୁହେଁ । ଏହି ପରିସ୍ଥିତିର ସମାଧାନ ପାଇଁ ତୁମକୁ 1 ଟଙ୍କା ଋଣ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ । ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ ଗାଣିତିକ ସମାଧାନ କେବଳ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା '1' ଦ୍ୱାରା ନ ହୋଇ 'ଋଣାତ୍ମକ 1' (ଯାହାକୁ ଆମେ –1 ଭାବେ ଲେଖିବା) ଦ୍ୱାରା ସମ୍ଭବ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $10 - 11 = -1$ ସେହିପରି $10 - 12 = -2$

ଏହିପରି ପରିସ୍ଥିତିର ସମାଧାନ ପାଇଁ $-1, -2, -3$ .... ଆଦି ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଆବିଷ୍କୃତ ହେଲା ।

ମନେରଖ : 0 ଏକମାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ଧନାତ୍ମକ ନୁହେଁ କି ଋଣାତ୍ମକ ନୁହେଁ ।

ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା, ଶୂନ ଓ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସମୂହକୁ ଆମେ Z ସେଟ୍ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରୁ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $Z = \{...., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Z ସେଟ୍ ଏକ ଅସୀମ ସେଟ୍ ଏବଂ N ସେଟ୍ Z ସେଟ୍‌ର ଏକ ଉପସେଟ୍, ଅର୍ଥାତ୍ $N \subset Z$

ସେହିପରି ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ $\{1, 2, 3...\}$ ଏବଂ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ $\{...-4, -3, -2, -1\}$ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଅସୀମ ସେଟ୍ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପସେଟ୍ ।

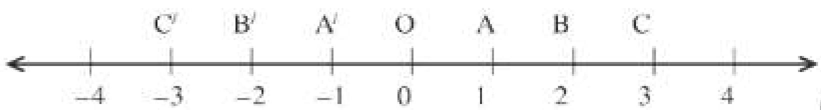
ଟୀକା : ଅଣଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା (Non-Positive Integers) ସେଟ୍ $= \{...-4, -3, -2, -1, 0\}$

ଅଣଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା (Non-Negative Integers) ସେଟ୍

ଅଥବା ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ $(N^*) = \{0, 1, 2, 3...\}$

ଉଭୟ ସେଟ୍ ଅସୀମ ସେଟ୍ ଏବଂ ଉଭୟ ସେଟ୍‌ର ସଂଯୋଗରେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ (**Z**) ହୁଏ ।

ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇ ପାରେ । ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାରେଖାକୁ ଦେଖ ।



(ଚିତ୍ର 2.1)

ସରଳରେଖାର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ O ନାମରେ ନାମିତ କର ଓ ଏହି ବିନ୍ଦୁକୁ 0 (ଶୂନ) ସଂଖ୍ୟାର ପ୍ରତୀକ ବୋଲି ଧରିନିଅ । ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନେଇ O ବିନ୍ଦୁର ଡାହାଣ ପାଖରେ A ବିନ୍ଦୁ ବସାଅ । ଏହି ବିନ୍ଦୁକୁ ସଂଖ୍ୟା 1ର ପ୍ରତୀକ ବୋଲି କୁହ । $\overrightarrow{OA}$ ରୁ OA ଦୂରତା ସଂଗେ ସମାନ କରି Aର ଡାହାଣକୁ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନ ଛେଦ କର ଓ ଛେଦବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ B,C ଆଦି ନାମ ଦିଅ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଏହି ବିନ୍ଦୁମାନ ଯଥାକ୍ରମେ 2,3... ମାନଙ୍କର ପ୍ରତୀକ ହେବେ । ଏହିପରି **N** ସେଟ୍‌ର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ପାଇଁ ସରଳରେଖାରେ 'O'ର ଡାହାଣକୁ ବିନ୍ଦୁମାନ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇ ପାରିବ । 'O'ର ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ A', B', C'.... ବିନ୍ଦୁମାନ ଚିହ୍ନଟ କର ଯେପିରକି $OA = OA' = A'B' = B'C' =$ .... ବର୍ତ୍ତମାନ A', B', C'.... ବିନ୍ଦୁମାନ ଯଥାକ୍ରମେ ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା $-1, -2, -3$... ମାନଙ୍କ ପ୍ରତୀକ ହେବେ । ଏହି ପ୍ରକାରରେ ସେଟ୍ **Z** (ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍)ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ପାଇଁ ସରଳରେଖାରେ ବିନ୍ଦୁମାନ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇ ପାରିବ । ଉକ୍ତ ସରଳରେଖାକୁ **ସଂଖ୍ୟାରେଖା (Number line)** କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାରେଖାକୁ **ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସୂଚକ ରେଖାଚିତ୍ର** ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ଏଠାରେ ମନେରଖିବା ଉଚିତ ହେବ ଯେ, **Z**ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ, ରେଖାଚିତ୍ରରେ ଏହାର ଡାହାଣକୁ ଥିବା ଉପାଦାନଠାରୁ ସାନ । ବିପରୀତ କ୍ରମେ **Z**ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ, ରେଖାଚିତ୍ରରେ ଏହାର ବାମକୁ ଥିବା ଉପାଦାନ ଅପେକ୍ଷା ବଡ଼ ।

2.2 ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (Rational Number) :

ମନେକର p ଓ q ଉଭୟେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ ତେବେ p କୁ q ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, ଆମେ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଟିଏ ପାଇବା କି ?

6 କୁ 3 ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, ଭାଗଫଳ 2 ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା । କିନ୍ତୁ 6କୁ 5 ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, ଭାଗଫଳ $\frac{6}{5}$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ । ତେଣୁ ହରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ଅଧିକ ବ୍ୟାପ୍ତ ଓ 0 ଭିନ୍ନ ଯେ କୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ହରଣକୁ ଅର୍ଥ ପୂର୍ଣ୍ଣ କରିବାକୁ ହେଲେ, ଆମକୁ ସଂଖ୍ୟା ସଂପର୍କୀୟ ଜ୍ଞାନର ପରିସରକୁ ବଢ଼ାଇବାକୁ ହେବ ।

ଯଦି p ଓ q ଦୁଇଗୋଟି ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଓ $q \neq 0$ ତେବେ $p \div q$ ବା $\frac{p}{q}$ କୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ । ସମସ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍‌କୁ Q ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

ଯେକୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା m ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । କାରଣ m କୁ $\frac{m}{1}$ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ । ସେ ଦୃଷ୍ଟିରୁ **0 ମଧ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।** **Q ସେଟ୍ ଏକ ଅସୀମ ସେଟ୍ ଏବଂ $N \subset Z \subset Q$**

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $\frac{p}{q}$ ର ହର $q \neq 0$, କାରଣ କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାକୁ '0' ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ଅସମ୍ଭବ ଅର୍ଥାତ୍ ସଂଜ୍ଞାହୀନ ।

2.2.1. ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଧର୍ମ (Properties of Rational numbers) :

1. ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ (Closure Law) :

(i) ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (Natural Numbers) ଏବଂ ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (Extended Natural Nudmbers)

ତଳ ଶ୍ରେଣୀରେ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାରେ ବିଭିନ୍ନ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପାଇଁ ଏହି ନିୟମ ବିଷୟରେ ପଢ଼ିଛ । ଆସ ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଜରିଆରେ ସେଗୁଡ଼ିକ ମନେ ପକାଇବା ।

ପ୍ରକ୍ରିୟା	ଉଦାହରଣ	ଟିପ୍ପଣୀ
ଯୋଗକ୍ରିୟା	1+5= 6 ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା, ସେହିପରି 7+5= 12 ଏହା ମଧ୍ୟ ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା । ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ପାଇଁ a+b ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ।	ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗପ୍ରକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ । ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଏହା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।
ବିୟୋଗକ୍ରିୟା	5–2=3 ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା । କିନ୍ତୁ 2–5= –3 ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।	ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ବିୟୋଗ ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ । ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଏହା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।
ଗୁଣନକ୍ରିୟା	2 x 4 = 8 ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା 3 x7=21, ଏହା ମଧ୍ୟ ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା । ଯଦି a ଓ b ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ a xb ବା ab ମଧ୍ୟ ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ।	ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାସେଟ୍‌ରେ ଗୁଣନକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ । ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଏହା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।
ଭାଗକ୍ରିୟା	$8 \div 4 = 2$ ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା । $5 \div 8 = \frac{5}{8}$ ଏହା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।	ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଭାଗକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ । ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭବିକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଏହା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

(ii) ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା (Integers)

ଆସ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ବିଭିନ୍ନ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପାଇଁ ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ପ୍ରକ୍ରିୟା	ଉଦାହରଣ	ଟିପ୍ପଣୀ
ଯୋଗକ୍ରିୟା	$0 + 5 = 5$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା । $7+5 = 12$, ମଧ୍ୟ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା । ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ପାଇଁ a+b ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା	ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗ କ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ବିୟୋଗକ୍ରିୟା	$5 - 2 = 3$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $2 - 5 = -3$ ମଧ୍ୟ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ଦୁଇଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ $a - b$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।	ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ଗୁଣନକ୍ରିୟା	$0 \times 3 = 0$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା $3 \times 7 = 21$ ମଧ୍ୟ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା । a ଓ b ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ab ମଧ୍ୟ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।	ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟରେ ଗୁଣନ କ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ଭାଗକ୍ରିୟା	$-14 \div 2 = -7$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା । $5 \div 8 = \frac{5}{8}$ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।	ଏଣୁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟରେ ଭାଗକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।

ଉପରୋକ୍ତ ସାରଣୀରୁ ଆମେ ଜାଣିବାକୁ ପାଇଲୁ ଯେ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗକ୍ରିୟା, ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା ଓ ଗୁଣନ କ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରିବା ବେଳେ ଭାଗକ୍ରିୟା ଉକ୍ତ ନିୟମ ପାଳନ କରୁ ନାହିଁ ।

(iii) ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (Rational Numbers) :

(a) ଯୋଗ କ୍ରିୟା:– ବର୍ତ୍ତମାନ କେତେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଡ଼ିକୁ ଯୋଗ କରାଯାଉ ।

$\frac{3}{8}+\frac{(-5)}{7}=\frac{21+(-40)}{56}=\frac{-19}{56}$ ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ସେହିପରି

$-\frac{3}{8}+\frac{(-4)}{5}=\frac{-15+(-32)}{40}=\frac{-47}{40}$ ଏହା ମଧ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

$\frac{4}{7}+\frac{6}{11}=$...... ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କି ?

ଆଉ କେତେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଡ଼ି ପାଇଁ ଏହିପରି ଯୋଗ କ୍ରିୟାର ଫଳାଫଳ ପରୀକ୍ଷା କର ।

ଏହି ପରୀକ୍ଷାରୁ ଆମେ ଜାଣିବା ଯେ ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ । ଅର୍ଥାତ୍ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।**

ଅର୍ଥାତ୍ ଯଦି $\mathbf{a, b \in Q}$, ତେବେ $\mathbf{a + b \in Q}$

(b) ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା : କେତେ ଯୋଡ଼ା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ଆମେ ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା କରିବା ଓ ଦେଖିବା ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ବିୟୋଗଫଳ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବ କି ନାହିଁ ?

$-\frac{5}{7}-\frac{2}{3}=\frac{-5x3-2x7}{21}=\frac{-15-14}{21}=\frac{-29}{21}$ ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ସେହିପରି

$\frac{5}{8}-\frac{4}{5}=\frac{25-32}{40}=\frac{-17}{40}$ ଏହା ମଧ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

$\frac{3}{7}-\left(-\frac{8}{5}\right)=$......... ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କି ?

ଆଉ କେତେ ଯୋଡ଼ା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ଏହି ପରି ବିୟୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଦେଖିବ ଯେ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ଟିରେ ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।** ଅର୍ଥାତ୍ **$a, b \in Q$ ହେଲେ, $a-b \in Q$ ।**

(c) ଗୁଣନ କ୍ରିୟା : ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ବିଷୟ ଆଲୋଚନା କରାଯାଉ ।

$-\frac{2}{3}x\frac{4}{5}=-\frac{8}{15}, \frac{3}{7}x\frac{2}{5}=\frac{6}{35}$ ଏହି ଦୁଇଟି କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୁଣଫଳ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

$-\frac{4}{5}x\frac{-6}{11}=$...... ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କି ?

ଏହିପରି ଆଉ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଡ଼ିକୁ ନେଇ ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରି ଦେଖ । ତୁମେ ନିଶ୍ଚୟ ଏହି ସତ୍ୟରେ ଉପନୀତ ହେବ ଯେ **ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖାର ଗୁଣଫଳ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ । ଅତଏବ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ଟିରେ ଗୁଣନକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।**

ଅର୍ଥାତ୍ ଯଦି $a, b \in Q$, ତେବେ $a x b \in Q$ ।

(d) ଭାଗକ୍ରିୟା : ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

$-\frac{5}{3}\div\frac{2}{5}=\frac{-5}{3}x\frac{5}{2}=\frac{-25}{6}$ ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ସେହିପରି

$\frac{2}{7}\div\frac{5}{3}=\frac{2}{7}x\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$ ଏହା ମଧ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

$-\frac{3}{8}\div\frac{-2}{9}=$...... ଏହା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କି ?

କିନ୍ତୁ ଯେକୌଣସି ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା a ପାଇଁ $a \div 0$ ନିରର୍ଥକ । ତେଣୁ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟରେ ଭାଗକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।** ମାତ୍ର ଶୂନକୁ ଛାଡ଼ିଦେଲେ ଅନ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ପାଇଁ ଭାଗକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।

(ନିଜେ କର) ଦତ୍ତ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ କି ନାହିଁ (ହଁ / ନାହିଁ) ମାଧ୍ୟମରେ ଦତ୍ତ ସାରଣୀର ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନଗୁଡ଼ିକୁ ପୂରଣ କର :

ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍	ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ (Closure Law)			
	ଯୋଗକ୍ରିୟା	ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା	ଗୁଣନ କ୍ରିୟା	ଭାଗକ୍ରିୟା
ପରିମେୟ	–	–	–	–
ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–

2. କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ (Commutative Law) :

(i) ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା:– ଆସ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ବା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାରେ କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମକୁ ମନେ ପକାଇବା ।

ପ୍ରକ୍ରିୟା	ଉଦାହରଣ	ଟିପ୍ପଣୀ
ଯୋଗକ୍ରିୟା	$0 + 7 = 7 + 0 = 7$ $2 + 3 = 3 + 2 = 5$ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ପାଇଁ $a + b = b + a$	ଯୋଗକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା	$5 - 3 \neq 3 - 5$	ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।
ଗୁଣନ କ୍ରିୟା	$5 \times 3 = 3 \times 5$	କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳିତ ହୁଏ ।
ଭାଗ କ୍ରିୟା	$5 \div 3 \neq 3 \div 5$	ଭାଗକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।

ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉକ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ କି ନାହିଁ ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

(ii) ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା

ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଗୁଡ଼ିକରେ କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ କି ନାହିଁ ମନେପକାଇବା ।

ପ୍ରକ୍ରିୟା	ଉଦାହରଣ	ଟିପ୍ପଣୀ
ଯୋଗକ୍ରିୟା	$-3 + 5 = 5 + (-3)$	ଯୋଗକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ବିୟୋଗକ୍ରିୟା	$5 - (-3) \neq -3 - 5$	ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।
ଗୁଣନକ୍ରିୟା	$(-3) \times 5 = 5 \times (-3)$	ଗୁଣନକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ଭାଗକ୍ରିୟା	$-3 \div 5 \neq 5 \div (-3)$	ଭାଗକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।

(iii) ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା :

(a) ଯୋଗକ୍ରିୟା – ବର୍ତ୍ତମାନ କେତେ ଯୋଡ଼ା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଯୋଗ କରିବା ।

$-\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{-14+15}{21} = \frac{1}{21}$ ଓ $\frac{5}{7} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{15-14}{21} = \frac{1}{21}$ ତେଣୁ $-\frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{5}{7} + \left(-\frac{2}{3}\right)$

ସେହିପରି $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\frac{-58}{15}$ ଓ $\frac{-8}{3}+\left(\frac{-6}{5}\right)=\frac{-58}{15}$ ତେଣୁ $\frac{-6}{5}+\left(\frac{-8}{3}\right)=\frac{-8}{3}+\left(\frac{-6}{5}\right)$

$-\frac{3}{8}+\frac{1}{7}=\frac{1}{7}+\left(-\frac{3}{8}\right)$ ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଯେକୌଣସି କ୍ରମରେ ଯୋଗ କରାଯାଇ ପାରେ । ସେଥିପାଇଁ ଆମେ କହୁ ଯେ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯୋଗ କ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ଅଟେ । ଅର୍ଥାତ୍ ଯଦି a ଓ b ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ a + b = b + a ହେବ ।**

(b) ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା : $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}=\frac{-7}{12}$ ଏବଂ $\frac{5}{4}-\frac{2}{3}=\frac{7}{12}$ ତେଣୁ $\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\neq\frac{5}{4}-\frac{2}{3}$

ତୁମେ ଦେଖିବ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ବିୟୋଗକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନୁହେଁ ।**

ସେହିପରି ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ଯେ, $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\neq\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$

(c) ଗୁଣନକ୍ରିୟା : $-\frac{7}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{-42}{15}$ ଓ $\frac{6}{5}\times\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{-42}{15}$ ସେହିପରି $-\frac{8}{9}\times\left(-\frac{4}{7}\right)=\frac{-4}{7}\times\left(\frac{-8}{9}\right)$

ଏହିପରି ଆଉ କିଛି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଯୋଡ଼ାକୁ ଗୁଣନ କରି ଦେଖ । ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ଗୁଣନକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ** ଅଟେ । ଅର୍ଥାତ୍ **ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ପାଇଁ a x b = b x a**

(d) ଭାଗକ୍ରିୟା : $-\frac{5}{4}\div\frac{3}{7}\neq\frac{3}{7}\div\left(\frac{-5}{4}\right)$ (ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

ସେହିପରି ଅନ୍ୟ ଯୋଡ଼ା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କର । ଦେଖିବ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଓ ଅଣଶୂନ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ପାଇଁ $a \div b \neq b \div a$ (ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ) ।

ନିଜେ କର

ଦତ୍ତ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ କି ନାହିଁ (ହଁ / ନାହିଁ) ମାଧ୍ୟମରେ ଦତ୍ତ ସାରଣୀର ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନଗୁଡ଼ିକୁ ପୂରଣ କର ।

ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍	କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ			
	ଯୋଗକ୍ରିୟା	ବିୟୋଗକ୍ରିୟା	ଗୁଣନକ୍ରିୟା	ଭାଗକ୍ରିୟା
ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–

3. ସହଯୋଗୀ ନିୟମ (Associative Law) :

(i) ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା – ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାରେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିଥିବା ସହଯୋଗୀ ନିୟମକୁ ମନେକାଇବା ।

ପ୍ରକ୍ରିୟା	ଉଦାହରଣ	ଟିପ୍ପଣୀ
ଯୋଗକ୍ରିୟା	$(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$	ଯୋଗକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା	$(3-4) - 5 \neq 3 - (4 - 5)$	ବିୟୋଗକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।
ଗୁଣନକ୍ରିୟା	$7 \times (2 \times 5) = (7 \times 2) \times 5$ $4 \times (6 \times 10) = (4 \times 6) \times 10$	ଗୁଣନକ୍ରିୟା ସହେଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ଭାଗକ୍ରିୟା	$(3 \div 4) \div 5 \neq 3 \div (4 \div 5)$	ଭାଗକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।

ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉପରୋକ୍ତ ନିୟମ ପାଳିତ ହୁଏ କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

(ii) ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା (Integers) :

ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାରେ ସହଯୋଗ ନିୟମକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଗଲା ।

ପ୍ରକ୍ରିୟା	ଉଦାହରଣ	ଟିପ୍ପଣୀ
ଯୋଗ କ୍ରିୟା	$-2 + [3 + (-4)] = [(-2) + 3] + (-4)$ ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା a, b, c ପାଇଁ $a + (b + c) = (a + b) + c$	ଯୋଗକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା	$5-(7-3) \neq (5 - 7) - 3$	ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।
ଗୁଣନକ୍ରିୟା	$5 \times [(-7) \times (-8)] = [5 \times (-7)] \times (-8)$ ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା a, b ଓ c ପାଇଁ $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$	ଗୁଣନ କ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।
ଭାଗକ୍ରିୟା	$[(-10) \div 2] \div (-5) \neq (-10) \div [2 \div (-5)]$	ଭାଗକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।

(iii) ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା :

(a) ଯୋଗ କ୍ରିୟା :

$-\frac{2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\frac{-2}{3}+\left(\frac{18-25}{30}\right)=\frac{-2}{3}+\left(\frac{-7}{30}\right)=\frac{(-20)+(-7)}{30}=\frac{-27}{30}$; ଏବଂ

$\left[-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)=\left(\frac{-10+9}{15}\right)+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-1}{15}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{-2-25}{30}=\frac{-27}{30}=-$

$\therefore -\frac{2}{3}+\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]=\left[-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\right]+\left(\frac{-5}{6}\right)$

ସେହିପରି ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ, $-\frac{1}{2}+\left[\frac{3}{7}+\left(\frac{-4}{3}\right)\right]=\left[\frac{-1}{2}+\frac{3}{7}\right]+\left(\frac{-4}{3}\right)$

ଆହୁରି କିଛି ଅଧିକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ । ଏଥିରୁ ଆମେ ଜାଣିବା ଯେ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ଯୋଗକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ଅଟେ । ଅର୍ଥାତ୍ $a,b,c \in Q$ ହେଲେ $a+(b+c) = (a+b)+c$ ।**

(b) ବିୟୋଗକ୍ରିୟା :

ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ : $\frac{-2}{3}-\left[-\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right]=\left[-\frac{2}{3}-\left(\frac{-4}{5}\right)\right]-\frac{1}{2}$ ସତ୍ୟ କି ?

ବାମପକ୍ଷ $= \frac{-2}{3}-\left[\frac{-8-5}{10}\right]=\frac{-2}{3}-\left(\frac{-13}{10}\right)=\frac{-20+39}{30}=\frac{19}{30}$

ଦକ୍ଷିଣ ପକ୍ଷ $= \left(\frac{-10+12}{15}\right)-\frac{1}{2}=\frac{2}{15}-\frac{1}{2}=\frac{4-15}{30}=\frac{-11}{30}$ $\therefore$ ବାମପକ୍ଷ $\neq$ ଦକ୍ଷିଣ ପକ୍ଷ ।

ଆହୁରି କିଛି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

ଏଥିରୁ ଆମେ ଜାଣିବା ଯେ, ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।

(c) ଗୁଣନ କ୍ରିୟା :

ବର୍ତ୍ତମାନ ଗୁଣନକ୍ରିୟା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ସହଯୋଗୀ କି ନୁହେଁ ଦେଖିବା ।

$-\frac{7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{-7}{3}\times\frac{10}{36}=\frac{-70}{108}=\frac{-35}{54}$ ଏବଂ $\left(-\frac{7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}=\frac{-35}{12}\times\frac{2}{9}=\frac{-70}{108}=\frac{-35}{54}$

$\therefore\ -\frac{7}{3}\times\left(\frac{5}{4}\times\frac{2}{9}\right)=\left(\frac{-7}{3}\times\frac{5}{4}\right)\times\frac{2}{9}$, ସେହିପରି $\frac{2}{3}\times\left(\frac{-6}{7}\times\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{-6}{7}\right)\times\frac{4}{5}$

ଏଥିରୁ ଆମେ ଜାଣିବା ଯେ, **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୁଣନକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ଅଟେ ।**

ଅର୍ଥାତ୍ $a, b, c \in Q$ ପାଇଁ $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ ।

(d) ଭାଗକ୍ରିୟା :

ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ : $\frac{1}{2}\div\left[-\frac{1}{3}\div\frac{2}{5}\right]\neq\left[\frac{1}{2}\div\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\div\frac{2}{5}$ ସତ୍ୟ କି ?

ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ $=\frac{1}{2}\div\left[-\frac{1}{3}\div\frac{2}{5}\right]=\frac{1}{2}\div\left[-\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}\right]=\frac{1}{2}\div\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{-6}{5}\right)=\frac{-3}{5}$ ଏବଂ

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $=\left[\frac{1}{2}\div\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\div\frac{2}{5}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{-3}{1}\right)\div\frac{2}{5}=\frac{-3}{2}\div\frac{2}{5}=\frac{-3}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{-15}{4}$ $\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $\neq$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ ।

ଆହୁରି କିଛି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

ଦେଖିବ ଯେ **ଭାଗକ୍ରିୟା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ନାହିଁ ।**

ନିଜେ କର

ଦତ୍ତ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ କି ନାହିଁ (ହଁ / ନାହିଁ) ମାଧ୍ୟମରେ ଦତ୍ତ ସାରଣୀର ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍	ସହଯୋଗୀ ନିୟମ			
	ଯୋଗକ୍ରିୟା	ବିୟୋଗ କ୍ରିୟା	ଗୁଣନ କ୍ରିୟା	ଭାଗ କ୍ରିୟା
ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–
ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା	–	–	–	–

2.3 ଶୂନର ତାତ୍ପର୍ଯ୍ୟ :

ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା କେତେକ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

$2 + 0 = 0 + 2 = 2$ (ଏଠାରେ ଶୂନକୁ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସହ ମିଶାଗଲା ।)

$\frac{-2}{7} + 0 = 0 + \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{2}{7}$ (ଏଠାରେ ଶୂନକୁ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସହିତ ମିଶାଗଲା ।)

ଆଉ କେତୋଟି ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ତା ସହିତ ଶୂନ ଯୋଗ କରି ଦେଖ ।

ଏଥିରୁ ତୁମେ କ'ଣ ଜାଣିଲ ? ତୁମେ ଦେଖି କହିବ ଯେ 0 କୁ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସହିତ ଯୋଗକଲେ ଯୋଗଫଳ ମଧ୍ୟ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହେବ । ସେହିପରି 0 ସହିତ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଯୋଗକଲେ ଯୋଗଫଳ ମଧ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବ । ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ ଏହା ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହୋଇଥାଏ ।

ସାଧାରଣତଃ $b + 0 = 0 + b = b$ (b, ଯଦି ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ)

$x + 0 = 0 + x = x$ (x, ଯଦି ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ)

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ (Q ସେଟ୍‌ରେ) ଶୂନକୁ ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

2.4 ସଂଖ୍ୟା 1 ର ତାତ୍ପର୍ଯ୍ୟ :

ବର୍ତ୍ତମାନ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

$5 \times 1 = 5 = 1 \times 5$ (ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାକୁ 1 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ)

$-\frac{2}{7} \times 1 = 1 \times \frac{-2}{7} = -\frac{2}{7}$; $\frac{3}{8} \times 1 = 1 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$ (ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ 1 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ)

ଏଥିରୁ ତୁମେ କ'ଣ ଜାଣିଲ ?

ଯେକୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା, ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ବା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ 1 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ ସେହି ସଂଖ୍ୟାଟି ମିଳିଥାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ x, ଯେକୌଣସି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, $x \times 1 = 1 \times x = x$ ହେବ ।

1 କୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ (Q ସେଟ୍‌ରେ) ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

2.5 ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ (Additive Inverse of a Number) :

ନିମ୍ନ ପରିସ୍ଥିତିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

$1 + (-1) = (-1) + 1 = 0,\ 2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$ ଏଥିରୁ ଜାଣିଲ

a ଯଦି ଯେକୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ହେବ ।

ଏଠାରେ –a, a ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଅଥବା a, –a ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ।

ସେହିପରି $\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2 + (-2)}{3} = 0$ ଏବଂ $\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0$

ପୁନଶ୍ଚ, ଯେକୌଣସି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $\frac{a}{b}$ ପାଇଁ $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = \left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b} = 0$ ହେବ ।

$-\frac{a}{b}$ କୁ $\frac{a}{b}$ ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ $\frac{a}{b}$ କୁ $-\frac{a}{b}$ ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

କୌଣସି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା x ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ –x ଅଟେ । ଅର୍ଥାତ୍ $x + (-x) = (-x) + x = 0$ ।

2.6 ବ୍ୟତ୍କ୍ରମ (Reciprocal of a Number) :

କେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା $\frac{8}{21}$ କୁ ଗୁଣିଲେ ଗୁଣଫଳ 1 ହେବ ?

ନିଶ୍ଚିତ ଭାବେ ସଂଖ୍ୟାଟି $\frac{21}{8}$ କାରଣ $\frac{8}{21} \times \frac{21}{8} = 1$ ସେହିପରି $\frac{-5}{7}$ କୁ $\frac{7}{-5}$ ସହିତ ଗୁଣନ କଲେ ଗୁଣଫଳ 1 ହୁଏ ।

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମେ $\frac{21}{8}$ କୁ $\frac{8}{21}$ ର ବ୍ୟତ୍କ୍ରମ (Inverse) ଓ $\frac{7}{-5}$ କୁ $\frac{-5}{7}$ ର ବ୍ୟତ୍କ୍ରମ ବୋଲି କହୁ ।

ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟତ୍କ୍ରମକୁ ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

$\frac{c}{d}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ଅନ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $\frac{a}{b}$ ର ବ୍ୟତ୍କ୍ରମ ବା ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ହେଲେ $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = 1$ ହେବ ।

ଯଦି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $x \neq 0$, ତେବେ xର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ $\frac{1}{x}$ ଏବଂ $\frac{1}{x}$ ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ x ହେବ ।

2.7 ବଣ୍ଟନ ନିୟମ (Distributive Law) :

ତିନୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $\frac{-3}{4}, \frac{2}{3}$ ଓ $\frac{-5}{6}$ କୁ ନିଆଯାଉ ।

ଦେଖିବ, $\frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \left(-\frac{5}{6}\right)\right\} = -\frac{3}{4} \times \left\{\frac{(4)+(-5)}{6}\right\} = \frac{-3}{4} \times \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

ପୁନଶ୍ଚ $\left(-\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{3}{4} \times \frac{-5}{6}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{-4+5}{8} = \frac{1}{8}$ $\quad \therefore \frac{-3}{4} \times \left\{\frac{2}{3} + \frac{-5}{6}\right\} = \left(-\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{-3}{4} \times \frac{-5}{6}\right)$

ଏହିପରି ଆଉ କେତେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କରି ଜାଣିବ ଯେ, ଯଦି **a, b ଓ c ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ**

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ । ଏହି ନିୟମକୁ **ବଣ୍ଟନ ନିୟମ** କୁହାଯାଏ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (a)

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (i) $\frac{2}{8}$ (ii) $-\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-6}{-5}$ (iv) $\frac{2}{-9}$ (v) $\frac{19}{-6}$

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (i) -13, (ii) $\frac{13}{19}$ (iii) $\frac{1}{5}$ (iv) $\frac{-5}{8} \times \frac{-3}{7}$ (v) $-1 \times \frac{-2}{5}$ (vi) -1

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକରେ କେଉଁ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଛି ଲେଖ ।

   (i) $-\frac{4}{5} \times 1 = 1 \times \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$ (ii) $-\frac{13}{17} \times \frac{-2}{7} = \frac{-2}{7} \times -\frac{13}{17}$

   (iii) $-\frac{19}{29} \times \frac{29}{-19} = 1$ (iv) $\frac{1}{3} \times \left(6 \times \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{1}{3} \times 6\right) \times \frac{4}{3}$

4. $\frac{6}{13}$ କୁ $\frac{-7}{16}$ ର ବ୍ୟତ୍କ୍ରମ ସହିତ ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. $\frac{8}{9}$, $1\frac{1}{8}$ ର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ହେବ କି ? ଯଦି ନୁହେଁ ତେବେ କାହିଁକି ?

6. 0.3, $3\frac{1}{3}$ ର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ହେବକି ? ଯଦି ନୁହେଁ ତେବେ କାହିଁକି ?

7. ଉତ୍ତର ଦିଅ :-

(i) ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯାହାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ନାହିଁ ।

(ii) ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯାହାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ସେହି ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମାନ ।

(iii) ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ସେହି ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ସଂଗେ ସମାନ ।

8. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) ଶୂନର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ---- ।

(ii) ---- ଓ ---- ସଂଖ୍ୟାମାନେ ନିଜ ନିଜର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ।

(iii) –5 ର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ---- ।

(iv) $\frac{1}{x}$, $(x \neq 0)$ ର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ---- ।

(v) ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଏକ ---- ।

(vi) ଏକ ଋଣାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ଏକ ---- ।

2.8 ବିଭିନ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ :

ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆମେ ଆଲୋଚନା କରିଥିବା ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ– $N \subset N^* \subset Z \subset Q$

(i) **N** (ଗଣନ / ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍)

(ii) **N*** (ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍)

(iii) **Z** (ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍)

(iv) **Q** (ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍)

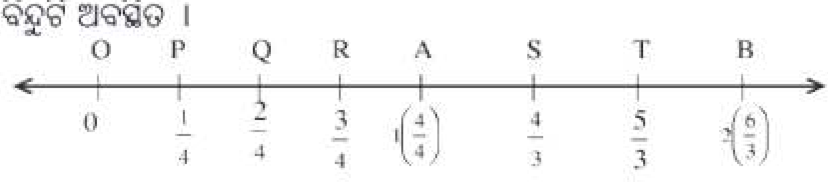
(ଚିତ୍ର 2.2)

2.9 ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା :

ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ କିପରି ଏକ ସରଳରେଖା (ସଂଖ୍ୟାରେଖା) ଉପରେ ବିନ୍ଦୁ ଭାବେ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଏ ତାହା ଆମେ ଜାଣିଛେ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଦେଖିବା ଯେ Q ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ (ଅର୍ଥାତ୍ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ) କିପରି ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ବିନ୍ଦୁ ଭାବେ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇପାରିବ ?

ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗରେ ଧନାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଓ ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗରେ ଋଣାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ବିନ୍ଦୁ ରୂପେ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 1 : ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $\frac{3}{4}$ ର ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । $\frac{3}{4}$ ର ଅର୍ଥ ହେଲା 4 ସମାନ ଭାଗରୁ 3 ଭାଗ । $\frac{3}{4}$ ସଂଖ୍ୟାଟି 0 (ଶୂନ) ଠାରୁ ବଡ଼ ଓ 1 ଠାରୁ ସାନ ଏବଂ $\frac{3}{4}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ଧନାତ୍ମକ । ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗରେ 0 ଓ 1 ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ନିରୂପିତ ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{OA}$ ଉପରେ $\frac{3}{4}$ ସଂଖ୍ୟାଟିର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁଟି ଅବସ୍ଥିତ ।

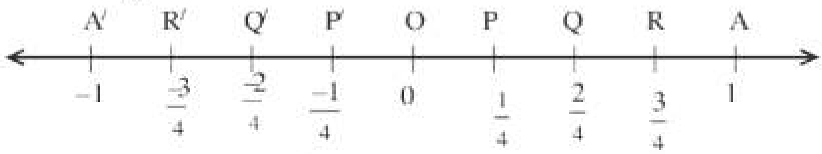


(ଚିତ୍ର 2.3)

$\overline{OA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମାନ ଚାରିଭାଗ କଲେ ଆମେ P, Q ଓ R ତିନିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ପାଇବା । $\overline{OP}$ = ପ୍ରଥମ ଭାଗ, $\overline{PQ}$ = ଦ୍ୱିତୀୟ ଭାଗ, $\overline{QR}$ = ତୃତୀୟ ଭାଗ ଓ $\overline{RA}$ = ଚତୁର୍ଥ ଭାଗ । R ବିନ୍ଦୁଟି ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି $\frac{3}{4}$ । ଆସ $\frac{5}{3}$ ର ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁଟି ସ୍ଥିର କରିବା । ଯେହେତୁ $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$ ତେଣୁ $1<\frac{5}{3}<2$ ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{5}{3}$ ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁଟି 1 ଓ 2 ସଂଖ୍ୟାସୂଚକ ବିନ୍ଦୁର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ । ତେଣୁ $\overline{AB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମାନ ତିନିଭାଗ କରୁଥିବା ବିଭାଜନ ବିନ୍ଦୁ S ଓ T (A ରୁ B ଆଡ଼କୁ) ହେଲେ, T ବିନ୍ଦୁଟି $\frac{5}{3}$ ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ । (ଚିତ୍ର 2.3 ଦେଖ)

ସୂଚନା : $\frac{p}{q}$ ଧନାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟିର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ପ୍ରଥମେ $\frac{p}{q}$ କେଉଁ କେଉଁ କ୍ରମିକ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଓ ଉକ୍ତ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ q ସମାନ ଭାଗ କରି p ସଂଖ୍ୟକ ଭାଗ ନେଇ ଏହାର ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁଟି ଚିହ୍ନଟ କର ।

ଉଦାହରଣ - 2 : $-\frac{3}{4}$ ସଂଖ୍ୟାଟି ଋଣାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେତୁ ଏହାର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁଟି ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ଋଣ ଦିଗ (ମୂଳ ବିନ୍ଦୁର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ)ରେ ଅବସ୍ଥିତ ।



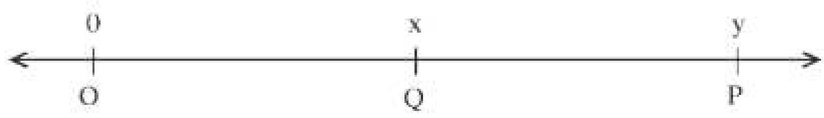
(ଚିତ୍ର 2.4)

ପ୍ରଥମେ ଧନାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $\frac{3}{4}$ ଚିହ୍ନଟ କର ଅର୍ଥାତ୍ R ବିନ୍ଦୁଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗରେ O ବିନ୍ଦୁଠାରୁ OR ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନେଲେ R′ ବିନ୍ଦୁ ପାଇବା ଓ R′ ବିନ୍ଦୁଟି $-\frac{3}{4}$ ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ।

ସୂଚନା : ସୁତରାଂ $\frac{p}{q}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ଋଣାତ୍ମକ ହେଲେ $-\frac{p}{q}=x$ ଧନାତ୍ମକ ଅଟେ । ପ୍ରଥମେ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ଧନାତ୍ମକ ଦିଗରେ x ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ K ନିଅ । O ବିନ୍ଦୁର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱରେ OK ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନେଇ K′ ବିନ୍ଦୁଟି ଚିହ୍ନଟ କଲେ ଏହି ବିନ୍ଦୁଟି ଋଣାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $-x=\frac{p}{q}$ କୁ ସୂଚାଇ ଥାଏ ।

ମନେରଖ :

ଯଦି x ଓ y ଦୁଇଗୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ $y > x$ ହୁଏ, ତେବେ y ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ P, x ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ Q ର ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବ ।

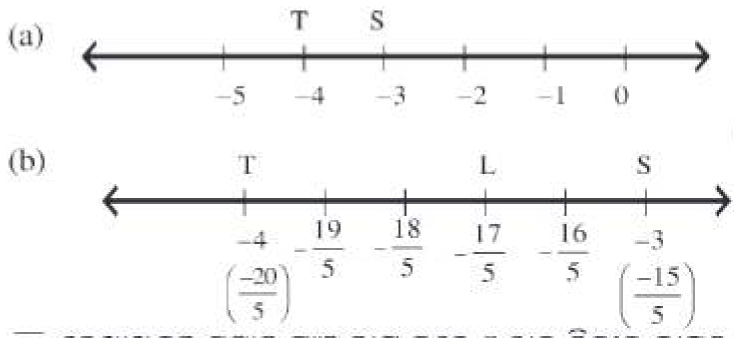


ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ : (ଚିତ୍ର 2.5)

ଉଦାହରଣ –1 : ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ $-\frac{17}{5}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ସୂଚାଅ ।

ସମାଧାନ : $-\frac{17}{5} = -3\frac{2}{5}$ ତେଣୁ

$\therefore -\frac{17}{5}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି –3 ଓ –4 ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ବିନ୍ଦୁ S ଓ T ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ।



(ଚିତ୍ର 2.6)

$\overline{ST}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମାନ ପାଞ୍ଚ ଭାଗ କଲେ S ଠାରୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ଭାଗର ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ L ଦ୍ୱାରା $-\frac{17}{5}\left(=-3\frac{2}{5}\right)$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ସୂଚିତ ହୁଏ ।

ବିକଳ୍ପ ସମାଧାନ ପାଇଁ ସୂଚନା : ପ୍ରଥମେ $\frac{17}{5}$ ପାଇଁ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ (K) ସ୍ଥିର କରିବା ପରେ 'O' ବିନ୍ଦୁର ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ OK ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନେଇ K ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇ ପାରିବ, ଯାହା $\frac{-17}{5}$ ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ –2 : $\frac{3}{5}$ ଓ $\frac{8}{13}$ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ବଡ଼ ?

ସମାଧାନ : $\frac{3}{5}$ ଓ $\frac{8}{13}$ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ବଡ଼, ଏହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେଲେ ପ୍ରଥମେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ହରକୁ ସମାନ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

5 ଓ 13 ର ଲ.ସା.ଗୁ. = 65 $\therefore 65 \div 5 = 13, 65 \div 13 = 5$

ସୁତରାଂ $\frac{3}{5}=\frac{3\times 13}{5\times 13}=\frac{39}{65}$ ଏବଂ $\frac{8}{13}=\frac{8\times 5}{13\times 5}=\frac{40}{65}$ (ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟକୁ ସମହର ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାରେ ପରିଣତ କରାଗଲା ।)

$\frac{39}{65}$ ଓ $\frac{40}{65}$ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{3}{5}$ ଓ $\frac{8}{13}$ ସହ ସମାନ ଅଟେ । ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟକୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମାନ 65 ଭାଗ କଲେ, $\frac{39}{65}$ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁର ଡାହାଣକୁ $\frac{40}{65}$ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁଟି ରହିବ । ତେଣୁ $\frac{40}{65} > \frac{39}{65}$ ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{8}{13} > \frac{3}{5}$ ।

ବି.ଦ୍ର. : $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ହେବ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $ad > bc$ ହେବ ଏବଂ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ହେବ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $ad < bc$ ହେବ । ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ ଭିତ୍ତି କରି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା ସମ୍ଭବ । ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

2.10 ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା :

ଆମେ ଜାଣିଛୁ 1 ଓ 5 ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରେ 2,3, 4 ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ଅଛନ୍ତି ।

7 ଓ 9 ମଧ୍ୟରେ କେବଳ 8 ଗୋଟିଏ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଅଛି ।

ସେହିପରି –5 ଓ 4 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ହେଲା –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 ଏବଂ

–1 ଓ 1 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଟି (0) ଶୂନ । ମାତ୍ର –9 ଓ –10 ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ନାହିଁ ।

ଉପରୋକ୍ତ ଆଲୋଚନାରୁ ଆମେ ଜାଣୁଛେ ଯେ, କ୍ରମିକ ହୋଇନଥିବା ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା) ମଧ୍ୟରେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା) ବିଦ୍ୟମାନ ।

ଆସ ଦେଖିବା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏହା ସତ୍ୟ କି ନୁହେଁ ?

ବର୍ତ୍ତମାନ ଦେଖାଯାଉ $\frac{3}{10}$ ଓ $\frac{7}{10}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ କେତୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରହୁଅଛି ?

ପ୍ରଥମ ପରିସ୍ଥିତି :

ଯେହେତୁ $\frac{3}{10} < \frac{4}{10} < \frac{5}{10} < \frac{6}{10} < \frac{7}{10}$ ତେଣୁ ଆମେ କହିପାରିବା $\frac{4}{10}, \frac{5}{10}$ ଓ $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{10}$ ଓ $\frac{7}{10}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ପରିସ୍ଥିତି :

ପୁନଶ୍ଚ $\frac{3}{10} = \frac{30}{100}$ ଲେଖିଥିଲେ ଓ $\frac{7}{10} = \frac{70}{100}$ ଲେଖିଲେ,

$\frac{31}{100}, \frac{32}{100}, \ldots \frac{69}{100}$ ଆଦି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ $\frac{3}{10}$ ଓ $\frac{7}{10}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବେ ।

ତୃତୀୟ ପରିସ୍ଥିତି :

ଯଦି $\frac{3}{10} = \frac{3000}{10000}$ ଓ $\frac{7}{10} = \frac{7000}{10000}$ ଆକାରରେ ଲେଖାଯାଏ ତେବେ $\frac{3001}{10000}, \frac{3002}{10000}, \ldots \frac{6998}{10000}, \frac{6999}{10000}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ $\frac{3}{10}$ ଓ $\frac{7}{10}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ହେବେ ।

ଉପରୋକ୍ତ ପରିସ୍ଥିତିଗୁଡ଼ିକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କଲେ ଆମେ ଜାଣୁଛେ ଯେ, $\frac{3}{10}$ ଓ $\frac{7}{10}$ ମଧ୍ୟରେ ଅଧିକରୁ ଅଧିକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଭର୍ତ୍ତି କରାଯାଇ ପାରେ ।

ତେଣୁ ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଅନୁମେୟ ଯେ, **ଦୁଇଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ବିଦ୍ୟମାନ ।**

ଉଦାହରଣ – 3 : -2 ଓ 0 ଭିତରେ ଥିବା 3ଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଲେଖ ।

ସମାଧାନ : $-2 = \frac{-20}{10}$ ଓ $0 = \frac{0}{10}$ ଲେଖିଲେ, $\frac{-19}{10}, \frac{-18}{10}, \ldots \frac{-16}{10}, \frac{15}{10}, \ldots \frac{-1}{10}$ ଆଦି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା -2 ଓ 0 ମଧ୍ୟରେ ରହିବେ, ଏଥିରୁ ଯେକୌଣସି ତିନୋଟିକୁ ନେଇ ଉତ୍ତରଟି ଲେଖାଯାଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ – 4 : $\frac{-5}{6}$ ଓ $\frac{5}{8}$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ଦଶଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ପ୍ରଥମେ $\frac{-5}{6}$ ଓ $\frac{5}{8}$ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟକୁ ସମାନ ହର ବିଶିଷ୍ଟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ପରିଣତ କର ।

ଯଥା : $\frac{-5}{6} = \frac{-5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{-20}{24}$ ଏବଂ $\frac{5}{8} = \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{15}{24}$ ଏଠାରେ $\frac{-20}{24} < \frac{15}{24}$ $(\because -20 < 15)$

ଅତଏବ $\frac{-19}{24}, \frac{-18}{24}, \frac{-17}{24}, \ldots\ldots, \frac{14}{24}$ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ $\frac{-5}{6}$ ଓ $\frac{5}{8}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

ସେଥିରୁ ଯେକୌଣସି ଦଶଟିକୁ ନେଇପାରିବା ।

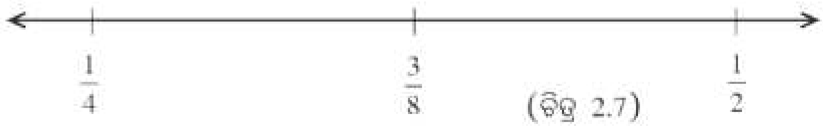
ବିକଳ୍ପ ସମାଧାନ :

ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଅସମାନ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ସେହି ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ହାରାହାରି ସ୍ଥିର କରାଯାଏ । ଉକ୍ତ ହାରାହାରି ଆବଶ୍ୟକ ହେଉଥିବା ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, 1 ଓ 2 ର ହାରାହାରି = $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$ ଯାହା 1 ଓ 2 ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

ଏହି ଉଦାହରଣରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, **ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ରହି ନ ପାରେ ମାତ୍ର ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରହିବା ସୁନିଶ୍ଚିତ ।**

ଉଦାହରଣ – 5 : $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର 2.7)

ସମାଧାନ : $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ର ମାଧ୍ୟମାନ

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା = $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1+2}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

$\therefore \frac{3}{8}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଚିତ୍ର 2.7 ରେ ଏହାକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

ଟୀକା :– ଯଦି a ଓ b ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ $\frac{a+b}{2}$, a ଓ b ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା

$a < b$ ହେଲେ $a < \frac{a+b}{2} < b$ ହେବ ।

ଏହି ହାରାହାରି ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ – 6 : $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ତିନୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ହାରାହାରି $=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

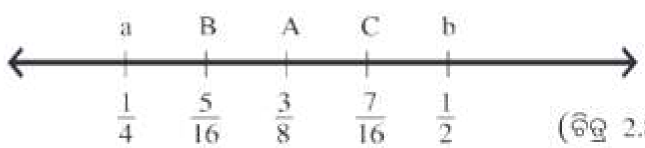
$\therefore \frac{3}{8}, \frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{1}{4}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{3}{8}$ ର ହାରାହାରି $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{16}$ $\therefore \frac{1}{4}<\frac{5}{16}<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$

ପୁନଶ୍ଚ $\frac{3}{8}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ର ହାରାହାରି $=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{16}$ $\therefore \frac{1}{4}<\frac{5}{16}<\frac{3}{8}<\frac{7}{16}<\frac{1}{2}$

ତେଣୁ $\frac{5}{16}$, $\frac{3}{8}$ ଓ $\frac{7}{16}$ ତିନୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ।

ଏହି ସଂଖ୍ୟା ତିନୋଟି ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ B,A ଓ C ନାମରେ ନାମିତ କରାଯାଇଛି ।



(ଚିତ୍ର 2.8)

ଟୀକା : ହାରାହାରି ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗରେ ଆମେ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ସୂଚିତ ଯେକୌଣସି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇପାରିବା ।

ଅନୁଶୀଳନୀ – 2 (b)

1. ପ୍ରଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ସୂଚିତ କର । (i) $\frac{7}{4}$, (ii) $\frac{-5}{6}$, (iii) $\frac{8}{3}$

2. $\frac{-2}{11}, \frac{-5}{11}, \frac{-9}{11}$ କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ଦେଖାଅ ।

3. (i) 2 ଠାରୁ ସାନ ପାଞ୍ଚଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଲେଖ ।

   (ii) $\frac{3}{5}$ ଓ $\frac{3}{4}$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଦଶଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. (i) $\frac{-2}{5}$ ଓ $\frac{1}{2}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦଶଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (ii) – 2 ଠାରୁ ବଡ଼ ପାଞ୍ଚଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ନିମ୍ନ ପ୍ରଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପାଞ୍ଚଟି ଲେଖାଏଁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (i) $\frac{2}{3}$ ଓ $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{-3}{2}$ ଓ $\frac{5}{3}$ (iii) $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{2}$

6. ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଡ଼ିଗୁଡ଼ିକରେ ଥିବା ବଡ଼ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ସ୍ଥିର କର ।

   (i) $\frac{2}{3}$ ଓ $\frac{5}{7}$ (ii) $\frac{3}{4}$ ଓ $\frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{7}$ ଓ $\frac{4}{11}$

2.11 ସଂଖ୍ୟା ଖେଳ (Playing with Numbers) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା), ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକର ମଧ୍ୟ ସବିଶେଷ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇସାରିଛି । ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟା ପଦ୍ଧତିରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସମସ୍ତ ସଂଖ୍ୟାରେ ବ୍ୟବହୃତ ଅଙ୍କସମୂହ; ଯଥା– 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ର ସ୍ଥାନୀୟ ମାନ ଅନୁଯାୟୀ ସଂଖ୍ୟା ଲିଖନ କିପରି ହୁଏ ତାହା ମଧ୍ୟ ତୁମେ ଆଗରୁ ଜାଣିଛ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ସଂଖ୍ୟା ଲିଖନ ସହ ବିସ୍ତାରିତ ସଂଖ୍ୟାର ରୂପ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା ହେବା ସହିତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ନେଇ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ଖେଳ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ । ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ପଢ଼ାଯାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାର ବିଭାଜ୍ୟତା ସଂପର୍କରେ ମଧ୍ୟ କିଛି ଅଧିକ ଆଲୋଚନା ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଅନ୍ୟ ଏକ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସଂରଚନାର ଅବତାରଣା କରାଯାଇ ପିଲାମାନଙ୍କର ବୋଧଶକ୍ତିକୁ ମଧ୍ୟ ବଢ଼ାଇବାର ପ୍ରୟାସ କରାଯାଇଛି ।

2.12. ସଂଖ୍ୟାର ବିସ୍ତାରିତ ରୂପ (General Form of Numbers):

ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାର ବିସ୍ତାରିତ ରୂପ ଅଥବା ବ୍ୟାପକ ରୂପ କହିଲେ ସଂଖ୍ୟାର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନୀୟମାନ ଅନୁଯାୟୀ ସଂଖ୍ୟାର ଲିଖନକୁ ବୁଝାଯାଏ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, $52 = 5 \times 10 + 2 \times 1$, $135 = 1 \times 100 + 3 \times 10 + 5 \times 1$

ସେହିପରି $496 = 4 \times 100 + 9 \times 10 + 6 \times 1$

(496 ର "4" ଶତକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ, "9" ଦଶକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଏବଂ '6' ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ)

ମନେକର "ab" ଗୋଟିଏ ଦୁଇ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା । ଏହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପଟି $a \times 10 + b \times 1 = 10a + b$

ବର୍ତ୍ତମାନ କହି ପାରିବ କି "ba" ର ବ୍ୟାପକ ରୂପଟି କ'ଣ ? (ଏଠାରେ "ab"କୁ axb ଭାବେ ନିଆଯାଇ ନାହିଁ)

ସେହିପରି ତିନି ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା abc ର ବ୍ୟାପକ ରୂପଟି ହେବ : $100a + 10b + c$ ।

ଅନୁରୂପଭାବେ "cba" ର ବ୍ୟାପକ ରୂପଟି ହେବ : $100c + 10b + a$ ।

(ନିଜେ କର) 1. ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟାପକ ରୂପ ଲେଖ ।

(i) 25 (ii) 73 (iii) 569

2. ନିମ୍ନରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟାପକ ରୂପକୁ ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।

(i) $10 \times 5 + 6$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 1 + 8$ (iii) $10\,p + 10\,q + r$

2.13. ସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ଖେଳ (Game with Numbers) :

2.13.1 ଦୁଇ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ଖେଳ :

ପ୍ରଥମ ଖେଳ : ଶରତ, ସୁନିତାକୁ ଗୋଟିଏ ଦୁଇ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଭାବିବାକୁ କହି ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଦେବାକୁ ଲାଗିଲା ।

ଶରତ

1. ଯେ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଭାବ । — ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି (49)
2. ଭାବିଥିବା ସଂଖ୍ୟାଟିର ସ୍ଥାନ ବିନିମୟ କର । — ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ଥାନ ବିନିମୟ କଲେ (94)
3. ସ୍ଥାନ ବିନିମୟ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାକୁ ପ୍ରଥମେ ନେଇ ଥିବା ସଂଖ୍ୟା ସହ ମିଶାଅ : — ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପୂର୍ବ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି (143)
4. ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟିକୁ "11" ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । — ସମଷ୍ଟିକୁ "11"ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ (13)
5. ଦେଖିବ "11" ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ଫଳରେ ଭାଗଶେଷ ରହିବ ନାହିଁ । — ଭାଗଶେଷ (0) ଶୂନ

ସୁନିତା

ସୁନିତା, ଶରତକୁ କହିଲା ଭାଇ ତୁମେ କିପରି ଜାଣିଲ ଯେ, ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗଶେଷ କିଛି ରହିବ ନାହିଁ ? ବର୍ତ୍ତମାନ ଆସ ଏ ଖେଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କୌଶଳଟି କ'ଣ ବୁଝିବା ।

ଖେଳରେ ବ୍ୟବହୃତ କୌଶଳର ବିଶ୍ଳେଷଣ :

ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି ab, ଯାହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $10a + b$ । ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ଥାନବିନିମୟ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଟି ba ହେବ । ଯାହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $10b + a$ ହେବ ।

ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $= 10a + b + 10b + a = 10a + a + 10b + b = 11a + 11b = 11\,(a + b)$

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡ଼ିଲା ଯେ, ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ସଦାସର୍ବଦା "11' ର ଏକ ଗୁଣିତକ; ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟା ସମଷ୍ଟିକୁ 11 ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ ରହିବ ନାହିଁ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର: ସଂଖ୍ୟା ସମଷ୍ଟିକୁ "11' ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଭାଗଫଳ, ଭାବିଥିବା ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ହେବ ।

ପ୍ରଥମ ଖେଳରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ଯେ, ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଭାଗଫଳଟି 13 ଯାହା ଭାବିଥିବ ସଂଖ୍ୟା 49 ର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ।

(ନିଜେ କର)

ପ୍ରଥମ ଖେଳକୁ ଅନୁସରଣ କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗଶେଷ ଏବଂ ଭାଗଫଳ କେତେ ରହୁଛି ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ - (i) 27 (ii) 39 (iii) 64 (iv) 78

ଦ୍ୱିତୀୟ ଖେଳ :

ଶରତ ପୁଣି ସୁନିତାକୁ ଗୋଟିଏ ଦୁଇ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଭାବିବାକୁ କହି ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଦେବାକୁ ଲାଗିଲା ।

ଶରତ

1. ଯେ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଭାବ ।
2. ଭାବିଥିବା ସଂଖ୍ୟାଟିର ସ୍ଥାନ ବିନିମୟ କର ।
3. ସ୍ଥାନ ବିନିମୟ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାକୁ ପ୍ରଥମେ ନେଇ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ ସ୍ଥିର କର । (ଅନ୍ତରଫଳ ଧନାତ୍ମକ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ)
4. ଅନ୍ତରଫଳକୁ "9" ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କର ।
5. ଦେଖିବ "9" ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ଫଳରେ ଭାଗଶେଷ ରହିବ ନାହିଁ ।

ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି (29)

ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ଥାନ ବିନିମୟ କଲେ (92)

ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲା (92–29=63)

ଅନ୍ତରଫଳକୁ "9" ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, ଭାଗଫଳ (7)

ଭାଗଶେଷ (0)

ସୁନିତା

ସୁନିତା ପୁଣି ଶରତକୁ କହିଲା ଭାଇ ତୁମେ କିପରି ଜାଣିଲ ଯେ, ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗଶେଷ କିଛି ରହିବ ନାହିଁ ? ବର୍ତ୍ତମାନ ଆସ ଏ ଖେଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କୌଶଳଟି କ'ଣ ବୁଝିବା ।

ଖେଳରେ ବ୍ୟବହୃତ କୌଶଳର ବିଶ୍ଳେଷଣ :

ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି ab ଯାହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ 10a + b । ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ଥାନବିନିମୟ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଟି ba ହେବ, ଯାହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ 10 b + a ହେବ ।

ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ $= (10b + a) - (10a + b)\ (a < b)$

$= 10b + a - 10a - b$

$= 10b - b + a - 10a$

$= 9b - 9a = 9(b - a)$

[ଯଦି a > b ହୋଇଥାଏ ଅନ୍ତରଫଳ 9 (a – b) ହେବ

ବିଶ୍ଳେଷଣ : $(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 10a - a + b - 10b = 9a - 9b = 9(a - b)$]

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡ଼ିଲା ଯେ, ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ ସଦାସର୍ବଦା "9" ର ଗୁଣିତକ । ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳକୁ "9" ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ ରହିବ ନାହିଁ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର : ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳକୁ "9" ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ, ଭାବିଥିବା ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ ସହ ସମାନ ହେବ ।

(i) a < b ହେଲେ b - a ଏବଂ (ii) a > b ହେଲେ a – b ହେବ ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ଖେଳରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ଯେ, ଭାଗ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଭାଗଫଳଟି '7' ଯାହା ଭାବିଥିବା ସଂଖ୍ୟା 29 ର ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ ସହ ସମାନ ।

(ନିଜେ କର) ଦ୍ୱିତୀୟ ଖେଳକୁ ଅନୁସରଣ କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗଶେଷ ଏବଂ ଭାଗଫଳ କେତେ ରହୁଛି ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ : (i) 17 (ii) 21 (iii) 96 (iv) 37

2.13.2 ତିନି ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ଖେଳ :

ତୃତୀୟ ଖେଳ : ବର୍ତ୍ତମାନ ସୁନିତାର ପାଳି । ସୁନିତା, ଶରତକୁ ଗୋଟିଏ ତିନି ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଭାବିବାକୁ କହିଲା ଏବଂ ପରେ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଅନୁଯାୟୀ କାର୍ଯ୍ୟ କରିବାକୁ କହିଲା ।

ସୁନିତା

ଶରତ

ନିର୍ଦ୍ଦେଶଗୁଡ଼ିକ ହେଲା –	ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ଅନୁଯାୟୀ ଶରତ ଦ୍ୱାରା ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ କାର୍ଯ୍ୟ
(i) ଗୋଟିଏ ତିନି ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଭାବ ।	(i) (349)
(ii) ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଓଲଟାଇ କ୍ରମରେ ଲେଖ ।	(ii) (943)
(iii) ବଡ଼ ସଂଖ୍ୟାରୁ ସାନ ସଂଖ୍ୟା ବିୟୋଗ କର ।	(iii) (594) (943 – 349 = 594)
(iv) ବିୟୋଗଫଳକୁ "99" ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।	(iv) ଭାଗଫଳ (594 ÷ 99 = 6) ଓ ଭାଗଶେଷ ରହୁନାହିଁ ।

ଖେଳରେ ବ୍ୟବହୃତ କୌଶଳର ବିଶ୍ଳେଷଣ :

ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି abc ଯାହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $100a + 10b + c$ $(a > c)$ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଓଲଟା କ୍ରମରେ ଲେଖିଲେ cba ହେବ । cba ର ବ୍ୟାପକ ରୂପ ହେଲା $100c + 10b + a$ ହେବ ।

ବଡ଼ ସଂଖ୍ୟାରୁ ସାନ ସଂଖ୍ୟା ବିୟୋଗ କଲେ ପାଇବା : $(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$

$$= 100a + 10b + c - 100c - 10b - a$$

$$= 100a - a - 100c + c = 99a - 99c = 99\ (a - c)$$

(ଯଦି $c > a$ ହୋଇ ଥାଏ ତେବେ ବିୟୋଗଫଳ $99\ (c - a)$ ହେବ)

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡ଼ିଲା ଯେ, ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ବିୟୋଗଫଳ "99" ର ଏକ ଗୁଣିତକ । ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ବିୟୋଗଫଳକୁ "99" ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ ରହିଲା ନାହିଁ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର :

ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ବିୟୋଗଫଳକୁ "99" ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ ଶତକ ଏବଂ ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ ସହ ସମାନ ହେବ ।

ଉକ୍ତ ଖେଳରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ଯେ, ଭାଗ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଭାଗଫଳ "6" ଯାହା ଭାବିଥିବା ତିନି ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା "349"ର ଏକକ ଓ ଶତକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ ସହ ସମାନ ।

ନିଜେ କର

ତୃତୀୟ ଖେଳକୁ ଅନୁସରଣ କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗଶେଷ ଓ ଭାଗଫଳ କେତେ ରହୁଛି ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ :

(i) 132 (ii) 469 (iii) 543 (iv) 901

ଚତୁର୍ଥ ଖେଳ :

ବର୍ତ୍ତମାନ ଶରତର ପାଳି । ଶରତ ସୁନିତାକୁ ତିନୋଟି ଅଙ୍କ ଭାବିବାକୁ କହିଲା ଏବଂ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ମୁତାବକ କାର୍ଯ୍ୟ କରିବାକୁ କହିଲା ।

ଶରତ

ସୁନିତା

ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ସମୂହ :	ନିର୍ଦ୍ଦେଶ ମୁତାବକ ସୁନିତାର କାର୍ଯ୍ୟ
(i) ତିନୋଟି ଭିନ୍ନ ଅଙ୍କ ଭାବିବାକୁ କହିଲା ।	(i) 2, 3, ଏବଂ 7
(ii) ଏ ଅଙ୍କ ତ୍ରୟକୁ ନେଇ ତିନୋଟି ତିନି ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଗଠନ କରିବାକୁ କହିଲା; ଯେଉଁଥିରେ ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକ ଗଠିତ ସଂଖ୍ୟାରେ ଥରେ ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସ୍ଥାନ ନେବେ । ଯଥା : ଅଙ୍କତ୍ରୟ ଯଦି a, b, c ହୋଇଥାଏ, ତେବେ abc, cab ଏବଂ bca	(ii) 237, 723, 372
(iii) ସଂଖ୍ୟା ତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି ସ୍ଥିର କରି ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ କହିଲା ।	(iii) 237 + 723 + 372 = 1332
(iv) ସମଷ୍ଟିକୁ 37 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବାକୁ କହିଲା	(iv) 1332 ÷ 37 = 36
(v) ଦେଖିବ ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି କୁ 37 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଭାଗଶେଷ ରହୁନାହିଁ ।	(v) ଭାଗଶେଷ ରହୁ ନାହିଁ ।

ଖେଳରେ ବ୍ୟବହୃତ କୌଶଳର ବିଶ୍ଲେଷଣ :

abc ର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $100a + 10b + c$,

cab ର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $100c + 10a + b$ ଏବଂ bca ର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $100b + 10c + a$ ।

ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି $= (100a + 10b + c) + (100c + 10a + b) + (100b + 10c + a)$

$$= (100a + 10a + a) + (100b + 10b + b) + (100c + 10c + c)$$

$$= 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c) = 37 \times 3(a + b + c)$$

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡ଼ିଲା ଯେ, ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି ସଦାସର୍ବଦା "37" ର ଏକ ଗୁଣିତକ । ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟିକୁ 37 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଭାଗଶେଷ ରହିବ ନାହିଁ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର :

ସଂଖ୍ୟା ତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି କୁ "37" ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ, ଭାବିଥିବା ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟିର 3 ଗୁଣ ସହ ସମାନ ହେବ ।

ଉକ୍ତ ଖେଳରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ଯେ, ଭାଗକରିବା ଦ୍ୱାରା ଭାଗଫଳଟି 36; ଯାହା ଅଙ୍କ ତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟିର 3 ଗୁଣ ସହ ସମାନ ।

ଦତ୍ତ ସଂରଚନାକୁ ଦେଖ ଏବଂ ମନେରଖ :

3 x 37 = 111	12 x 37 = 444
6 x 37 = 222	15 x 37 = 555
9 x 37 = 333	18 x 37 = 666 ଇତ୍ୟାଦି ।

(ନିଜେ କର)

1. ଚତୁର୍ଥ ଖେଳକୁ ଅନୁସରଣ କରି ନିମ୍ନ ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗଶେଷ ଓ ଭାଗଫଳ କେତେ ରହୁଛି ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ : (i) 4, 1, 7 (ii) 6, 3, 2 (iii) 1, 2, 3 (iv) 9, 3, 7

2. ନିମ୍ନ ସଂରଚନାଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖି ଅତିକମ୍‌ରେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଦୁଇଟି ଧାଡ଼ି ଲେଖ ।

(a)

$$7 \times 9 = 63$$
$$77 \times 99 = 7623$$
$$777 \times 999 = 776223$$
$$7777 \times 9999 = 77762223$$

(b)

$$2178 \times 4 = 8712$$
$$21978 \times 4 = 87912$$
$$219978 \times 4 = 879912$$
$$2199978 \times 4 = 8799912$$

2.14. ବିଭାଜ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା (Tests of Divisibility) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ପ୍ରଭୃତି ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ପାଇଁ ବିଭାଜ୍ୟତା କିପରି ପରୀକ୍ଷା କରାଯାଏ ତାହା ତୁମେମାନେ ପଢ଼ିଛ, ଅର୍ଥାତ୍ କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟା / ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ କି ନାହିଁ ତୁମେମାନେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖିସାରିଛ । ଉପରୋକ୍ତ ବିଭାଜ୍ୟତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅଧିକ ଆଲୋଚନା ଏଠାରେ କରିବା ।

2.14.1 ସଂଖ୍ୟା 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା (Divisibility by 10):

କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା '10' ର ଗୁଣିତକ ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟି 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ । ଏଥିରେ କୌଣସି ସନ୍ଦେହ ନାହିଁ । ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

10, 20, 30, 40, 50 .....ଆଦି '10' ର ଗୁଣିତକ ଅଟନ୍ତି ଏବଂ ଏମାନଙ୍କର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ '0' । ତେଣୁ ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାଗଲା ଯେ, କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ "0' ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି 10 ର ଗୁଣିତକ ହେବ ଏବଂ ସଂଖ୍ୟାଟି 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଉକ୍ତ ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମ ବୁଝିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା ।

".....cba' ମନେକର ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ।

ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ ..... $+ 100c + 10b + a$ ହେବ ।

ଏଠାରେ "a' ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ, "b" ଦଶକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଏବଂ c ଶତକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଇତ୍ୟାଦି ।

10, 100 ଇତ୍ୟାଦି 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେତୁ 10b ଏବଂ 100c ମଧ୍ୟ 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ । କିନ୍ତୁ "a" 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବା ଦରକାର । ଏଥିପାଇଁ $a = 0$ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ । ଅର୍ଥାତ୍ ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ a, 0 ହେଲେ ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟି "10" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜିତ ହେବ । ତେଣୁ

10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମଟି ହେଲା –

କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ 0 ହୋଇଥିଲେ ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟି 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।

(ନିଜେ କର) ନିମ୍ନ ସଂରଚନାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରି ପରବର୍ତ୍ତୀ ଦୁଇ ଧାଡ଼ି ଲେଖ ।

(a)

$$10 = 10^1$$
$$10 \times 10 = 100 = 10^2$$
$$10 \times 10 \times 10 = 1000 = 10^3$$
$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000 = 10^4$$

(b)

$$\frac{1}{10} = 10^{-1} = 0.1$$
$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 10^{-2} = 0.01$$
$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 10^{-3} = 0.001$$
$$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 10^{-4} = 0.0001$$

2.14.2 ସଂଖ୍ୟା 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା (Divisibility by 5) :

'5' ର ଗୁଣିତକ ଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା : 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55......

ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଦେଖିବା ଯେ ଏଗୁଡ଼ିକର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ 5 କିମ୍ବା 0 । 5 ଏବଂ 0 ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

ତେଣୁ ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମଟି ହେଲା –

କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ 0 କିମ୍ବା 5 ହୋଇଥିଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି '5' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉକ୍ତ ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମର ଅବତାରଣା କାହିଁକି ? ଆସ ବୁଝିବା ।

ପୂର୍ବ ପରି .... cab ଏକ ସଂଖ୍ୟା । ଯାହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପଟି .... 100c + 10b + a । ଏଠାରେ 10b, 100c...... ଇତ୍ୟାଦି 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ । କାରଣ 5 ର ଗୁଣିତକ 10 ଓ 100 । ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟି '5' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବାକୁ ହେଲେ a ମଧ୍ୟ 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜିତ ହେବା ଦରକାର । ତେଣୁ a ର ମାନ 0 କିମ୍ବା 5 ହେବା ଦରକାର ।

2.14.3. ସଂଖ୍ୟା "2" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା (Divisibility by 2) :

"2" ର ଗୁଣିତକ (ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା) ଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଯଦି 0, 2, 4, 6 କିମ୍ବା 8 ହୋଇଥାଏ ତେବେ ସଂଖ୍ୟାଟି "2' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ । ଅନ୍ୟପ୍ରକାରେ କହିବାକୁ ଗଲେ,

ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ 2 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉକ୍ତ ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମର ଅବତାରଣା କରାଯାଉ ।

ପୂର୍ବ ଉଦାହରଣ ପରି .....c b a ଏକ ସଂଖ୍ୟା ତେବେ ଏହାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ ....+100c + 10b + a । ପ୍ରଥମ ଦୁଇଟି ପଦ 100c ଏବଂ 10 b ପ୍ରତ୍ୟେକେ 2 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ କାରଣ 100 ଏବଂ 10 '2' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ । ଏଠାରେ ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟି "2" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ଯଦି "a' "2' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।

ଏହା କେବଳ ସମ୍ଭବ ଯଦି a = 0, 2, 4, 6 କିମ୍ବା 8 ହେବ ।

2.14.4 ସଂଖ୍ୟା '9' ଏବଂ '3' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା (Divisibility by 9 and 3) :

10, 5 ଏବଂ 2 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷଣ, ସଂଖ୍ୟାର କେବଳ ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରିଥାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ 10, 5 ଏବଂ 2 ର ବିଭାଜ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷଣ ପାଇଁ ସଂଖ୍ୟାର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କକୁ ଛାଡ଼ି ଅନ୍ୟ ଅଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼ି ନଥାଏ । କିନ୍ତୁ "9" କିମ୍ବା "3" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷଣ ପାଇଁ ସଂଖ୍ୟାରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଙ୍କର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼ିଥାଏ । "9" ଏବଂ "3" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମଟିକୁ ମନେ ପକାଅ ।

ବିଭାଜ୍ୟ ନିୟମଟି ହେଲା –

(i) କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କମାନଙ୍କ ସମଷ୍ଟି 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟହେଲେ ସଂଖ୍ୟଟି 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହୁଏ । ଅନ୍ୟଥା ସଂଖ୍ୟାଟି 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ନାହିଁ ।

(ii) କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କମାନଙ୍କ ସମଷ୍ଟି 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହୁଏ । ଅନ୍ୟଥା 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ନାହିଁ ।

ଉକ୍ତ ବିଭାଜ୍ୟତା ସୂତ୍ରର ଅବତାରଣା କାହିଁକି ହୋଇଛି ଆସ ତାହାକୁ ବୁଝିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା ।

ବିଶ୍ଳେଷଣ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି c b a ।

c b a ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $= 100c + 10b + a$

$= (99c + c) + (9b + b) + a = 99c + 9b + (a + b + c) = 9\,(11c + b) + (a + b + c)$

ଏଠାରେ cba ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟାପକ ରୂପର ରୂପାନ୍ତରଣରେ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଥିବା 9 (11c + b) ପଦଟି "9" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ । ଯଦି (a + b + c) ଅର୍ଥାତ୍ ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କ ତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି 9 ଦ୍ୱାରା (କିମ୍ବା 3 ଦ୍ୱାରା) ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ, ତେବେ "cba" ସଂଖ୍ୟାଟି 9 (କିମ୍ବା 3 ଦ୍ୱାରା) ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।

ଆସ ଏକ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଉକ୍ତ ବିଭାଜ୍ୟତାକୁ ବୁଝିବାକୁ ଚେଷ୍ଟାକରିବା ।

ଉଦାହରଣ – 7 : "3573" ସଂଖ୍ୟାଟି "9" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ କି ନୁହେଁ ପରୀକ୍ଷା କରିବା ।

ସମାଧାନ : 3573 ର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $= 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3 \times 1$

$= 3 \times (999 + 1) + 5 (99 + 1) + 7 (9 + 1) + 3 \times 1$

$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 3)$

$= 9 (3 \times 111 + 5 \times 11 + 7) + (3 + 5 + 7 + 3)$

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡୁଛି ଯେ, ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି (3 + 5 + 7 +3 = 18), 9 କିମ୍ବା 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ଅର୍ଥାତ୍ 3573, 9 କିମ୍ବା 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜିତ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ – 8 : 3576 ସଂଖ୍ୟାଟି 9 କିମ୍ବା 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

ସମାଧାନ : 3576 $= 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 6$

$= 3 (999 + 1) + 5 (99 + 1) + 7 (9 + 1) + 6$

$= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 6)$

ଏଠାରେ (3 + 5 + 7 + 6) ଅର୍ଥାତ୍ 21 "9" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ନୁହେଁ କିନ୍ତୁ "3" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟା 3576 କେବଳ 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ଟୀକା : '9' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟ '3' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ । କାରଣ '3'ର '9' ଏକ ଗୁଣିତକ । କିନ୍ତୁ '3' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା '9' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ନ ହୋଇ ପାରେ ।

ନିଜେ କର

1. '9' ର ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମକୁ ଆଧାର କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର "9" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତାକୁ ପରୀକ୍ଷା କର ।
   (i) 108 (ii) 616 (iii) 294 (iv) 432 (v) 927
2. '3' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜିତ ନିୟମକୁ ଆଧାର କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର "3" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତାକୁ ପରୀକ୍ଷା କର ।
   ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ଉଭୟ 3 ଏବଂ 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ?
   (i) 117, (ii) 213, (iii) 1735, (iv) 52722, (v) 317424, (vi) 63171423

2.14.5 ସଂଖ୍ୟା '11' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା (Divisibility by 11) :

"11" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମକୁ ମନେପକାଅ ।

ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମଟି ହେଲା:

କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଏବଂ ଅଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟିର ଅନ୍ତର ଯଦି 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହୁଏ, ତେବେ ସଂଖ୍ୟାଟି ମଧ୍ୟ 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।

ଉକ୍ତ ନିୟମର ଅବତାରଣାର ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ସମ୍ପର୍କରେ ଆସ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

(i) ଏକ ତିନି ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା cba ର ସାଧାରଣ ରୂପ $= 100c + 10b + a$

$= 99c + c + 11b - b + a = (99c + 11b) + (c - b + a)$

$= 11 (9c + b) + (a + c - b)$

ଯଦି cba ସଂଖ୍ୟାଟି "11" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ତେବେ $(a + c - b)$ ସଂପର୍କରେ କ'ଣ କୁହାଯାଇପାରେ ଭାବି ଦେଖ ।

(ii) ମନେକର d c b a ଏକ ଚାରି ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ।

d c b a ର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $= 1000\,d + 100\,c + 10\,b + a$

$$= 1001\,d - d + 99\,c + c + 11b - b + a$$

$$= 1001\,d + 99\,c + 11b + \{(a+c) - (b+d)\} = 11\,(91d + 9c + b) + \{(a+c) - (b+d)\}$$

ଯଦି ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟି 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ତେବେ $((a+c) - (b+d))$ ସଂପର୍କରେ କ'ଣ କୁହାଯାଇ ପାରେ ଭାବି ଦେଖ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ (i) ଓ (ii) ର ବିଶ୍ଳେଷଣରୁ ପାଇବା – **କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ଏବଂ ଅଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟିର ଅନ୍ତର, 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟି "11" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।**

ଉଦାହରଣ – 9 : 1309 ସଂଖ୍ୟାଟି 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖିବା ।

ସମାଧାନ : 1309 ସଂଖ୍ୟାର ଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି

(ବାମରୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ଚତୁର୍ଥ ସ୍ଥାନର ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି) $=3 + 9 = 12$

ଅଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି (ବାମରୁ ପ୍ରଥମ ଓ ତୃତୀୟ ସ୍ଥାନର ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି) $=1+0=1$

ଏଠାରେ ପ୍ରାପ୍ତ ସମଷ୍ଟି ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ $=12-1=11$ ଯାହା 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ

$\therefore$ ସଂଖ୍ୟାଟି 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ଉଦାହରଣ – 10 : 3521745238 ସଂଖ୍ୟାଟି "11" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

ସମାଧାନ : 3521745238 ସଂଖ୍ୟାର ଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି $(5 + 1 + 4 + 2 + 8) = 20$

ଏବଂ ଅଯୁଗ୍ମ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି $= (3+2+7+5+3) = 20$

ସମଷ୍ଟି ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରଫଳ $= 20 - 20 = 0$.

ଯାହା "11" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ; ତେଣୁ ସଂଖ୍ୟାଟି "11" ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ।

ନିଜେ କର

1. '11' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତା ନିୟମକୁ ଆଧାର କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟତାକୁ ପରୀକ୍ଷା କର ।

   (i) 1331, (ii) 14641, (iii) 132055, (iv) 2354012, (v) 2573439

2. ନିମ୍ନ ସଂରଚନାଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖି ପରବର୍ତ୍ତୀ ଧାଡ଼ିଟି ଲେଖ ।

$11 = 11$	$1 + 1 = 2^1$
$11 \times 11 = 121$	$1 + 2 + 1 = 2^2$
$11 \times 11 \times 11 = 1331$	$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$

ଟୀକା : (i) ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଓଲଟାଇ ଲେଖିଲେ ମଧ୍ୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହେ ।

(ii) ଗୁଣଫଳର ଅଙ୍କମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ଯଥାକ୍ରମେ $2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ ... ଇତ୍ୟାଦି ହେବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (c)

1. ନିମ୍ନ ସଂରଚନାଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖି ପରବର୍ତ୍ତୀ ଦୁଇଟି ଧାଡ଼ି ଲେଖ ।

(a)
$1 \times 9 + 1 = 10$
$12 \times 9 + 2 = 110$
$123 \times 9 + 3 = 1110$

(b)
$1 \times 8 + 1 = 9$
$12 \times 8 + 2 = 98$
$123 \times 8 + 3 = 987$

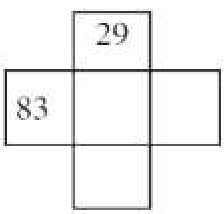
(c)
$6 \times 11 = 66$
$89 \times 101 = 8989$
$706 \times 1001 = 706706$

(d)
$1 + 2 = 3$
$4 + 5 + 6 = 7 + 8$
$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$

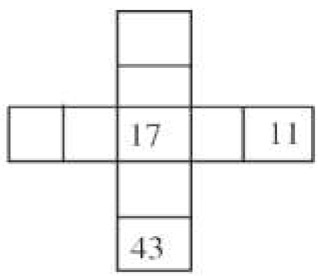
(e)
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

(f)
$2^2 - 1^2 = 2 + 1 = 3$
$3^2 - 2^2 = 3 + 2 = 5$
$4^2 - 3^2 = 4 + 3 = 7$
$5^2 - 4^2 = 5 + 4 = 9$
$6^2 - 5^2 = 6 + 5 = 11$

2. ନିମ୍ନ ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ (ଶୂନ୍ୟ ବର୍ଗଚିତ୍ର)ଗୁଡ଼ିକୁ ଦୁଇ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ପୂରଣ କର ଯେପରିକି ଯେଉଁପଟରୁ ମିଶାଇଲେ (ଉଲ୍ଲମ୍ବ ବା ଭୂ-ସମାନ୍ତର ଭାବେ) ମିଶାଣଫଳ (i) 123 ହେବ (ଚିତ୍ର - 1) ଓ
(ii) 161 ହେବ (ଚିତ୍ର - 2)



(ଚିତ୍ର - 1)



(ଚିତ୍ର - 2)

3. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅକ୍ଷର ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ (0 ରୁ 9 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ) ଅଙ୍କ ବାଛ; ଯେପରିକି ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ନିରୂପଣ ହୋଇପାରିବ । କେଉଁ ଅକ୍ଷର ପାଇଁ କେଉଁ ଅଙ୍କ ବ୍ୟବହାର କଲ ଲେଖ ।

(i) $xy = yx$

(ii) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

(iii) $A \times C \times AC = CCC$

(iv) $ABCD \times 9 = DCBA$

(v) $AB + BA = P(A+B)$

(vi) $AB - BA = P(A-B)$ $(A > B)$

(vii) $ABC + BCA + CAB = 111\ (A + B + C)$

(viii) $ABC - CBA = 99\ (A - C)$

ବି.ଦ୍ର. : ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ ପାଇଁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଭାବେ କୌଣସି ସୂତ୍ର ନାହିଁ । ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନେ ନିଜର ବୋଧଶକ୍ତି ବଳରେ ଉକ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ କରିପାରିବେ ।

4.(a) ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ '2' ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ?

24, 127, 210, 86, 95, 437, 251

(b) ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ଏବଂ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ 2 ଓ 5 ଉଭୟ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ?

105, 214, 420, 235, 930, 715

(c) ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ଏବଂ ଏଥି ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ଗୁଡ଼ିକ 2 ଓ 3 ଉଭୟ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ?

78, 403, 504, 917, 235, 216, 774, 804

(d) ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ କିନ୍ତୁ 9 ଦ୍ୱାରା ନୁହେଁ ?

702, 501, 213, 102, 675, 462

5. ତାରକା (*) ଚିହ୍ନିତ ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ଗୁଡ଼ିକୁ କେଉଁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଅଙ୍କଦ୍ୱାରା ପୂରଣ କଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି

(i) 3 ଦ୍ୱାରା (ii) 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବ ?

(a) 7 *5, (b) 3 * 2, (c) 17*, (d) 14*, (e) 2*2

6. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଲେଖ ।

(i) 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବେ ।

(ii) 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବେ ।

(iii) 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 6 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବେ ।

(iv) 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବେ ।

(v) 6 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 2 ଓ 3 ଉଭୟ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେବେ ।

7. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଲେଖ ।

(i) 710, 10 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ କିନ୍ତୁ 5 ଦ୍ୱାରା ନୁହେଁ ।

(ii) 105, 3 ଓ 5 ଉଭୟ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

(iii) 897, 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ନୁହେଁ କିନ୍ତୁ 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

(iv) 14641 ସଂଖ୍ୟାଟି 11 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

(v) 432 ସଂଖ୍ୟାଟି 3, 6 ଓ 9 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

*****

ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଓ ଅଭେଦ
(ALGEBRAIC EXPRESSIONS & IDENTITIES)

ଅଧ୍ୟାୟ
3

MDVCK4

3.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପୂର୍ବଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ (Algebraic expression) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିଛ । ଅର୍ଥାତ୍ ଏମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା; ଯଥା– ମିଶାଣ, ଫେଡାଣ, ଗୁଣନ ଆଦି କିପରି ସଂଗଠିତ ହୋଇଥାଏ, ତା'ର ଧାରଣା ପାଇସାରିଛ । ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଅକ୍ଷର –ସଂକେତ (literals) ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ, ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକୁ **ଚଳରାଶି (Variable)** କୁହାଯାଇଥାଏ । କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଚଳରାଶି ଥାଇ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା କିପରି ସଂଗଠିତ ହୋଇଥାଏ, ତାହା ଜାଣିଛ । ଏହି ପରିପ୍ରକାଶ, ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଠାରୁ କିପରି ଭିନ୍ନ ସେ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା ଏ ଅଧ୍ୟାୟର ମୁଖ୍ୟ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ । ଏଥି ସହ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା କିପରି ସଂଗଠିତ ହୁଏ ସେ ବିଷୟରେ ମଧ୍ୟ ଆଲୋଚନା ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ କରାଯିବ ।

3.2 ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Polynomial) :

ଆକ୍ଷରିକ ସଂକେତ (ଯଥା x, y, z .... a, b, c... ଇତ୍ୟାଦି) ଦ୍ୱାରା ଯେକୌଣସି ପରିପ୍ରକାଶ ମାଧ୍ୟମରେ 'ବୀଜଗାଣିତିକ ତତ୍ତ୍ୱ'କୁ ପରିବେଷଣ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, "x ଓ y ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, $x + y$ ମଧ୍ୟ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।"

ଏଠାରେ x ଓ y ର ଯେକୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ମାନ ପାଇଁ ଉପରୋକ୍ତ ଉକ୍ତିଟି ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

ଏଠାରେ "x ଓ y ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା $\Rightarrow x + y$ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା" । ଏହା ଏକ ବୀଜଗାଣିତିକ ତତ୍ତ୍ୱ ।

'$x + y$' ହେଉଛି ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ, x ଏବଂ y ହେଉଛି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ଆକ୍ଷରିକ ସଂକେତ (literal) । ତୁମେ ସପ୍ତମ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିଥିବା କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶର ଉଦାହରଣ ହେଲା,

(i) $3x$, (ii) $2x + 3$ (iii) $5x^2 - 2x - 3$, (iv) $x^4 + 3x^2 - 9x + 5$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର (a) ଦତ୍ତ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଗୁଡ଼ିକରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଚଳରାଶି 'x' ରହିଛି ।

(b) ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକରେ ଥିବା ଚଳରାଶି 'x' ର ଘାତ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା । ଅର୍ଥାତ୍ କୌଣସି କ୍ଷେତ୍ରରେ ଘାତଗୁଡ଼ିକ ରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

(0, 1, 2, 3...... ଇତ୍ୟାଦିକୁ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାସମୂହକୁ ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ ।)

(c) (i), (ii), (iii) ଓ (iv) ରେ ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକର ପଦସଂଖ୍ୟା ଯଥାକ୍ରମେ 1, 2, 3 ଏବଂ 4 । ତେଣୁ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଏକପଦ, ଦୁଇପଦ, ତିନି ପଦ ଓ ଚାରିପଦ ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁପଦ ରାଶି ବା ପରିପ୍ରକାଶ କହିବା ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆସ ଦେଖିବା ନିମ୍ନଲିଖିତ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକ, ଉପରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକଠାରୁ କିପରି ଭିନ୍ନ ?

(1) $6 + 2x^{-2} + x^2$, (2) $x + x^{-1}$, (3) $2x^2 + x^{-\frac{1}{3}} + 4$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିପ୍ରକାଶରେ କିଛି ରଣାତ୍ମକ ଅଥବା ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ପଦ ରହିଛି । ଯଥା: (1) ରେ ମଧ୍ୟମ ପଦଟି $2x^{-2}$, (2) ରେ ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦଟି x^{-1} ଏବଂ (3)ରେ ମଧ୍ୟମ ପଦଟି $x^{-\frac{1}{3}}$

କିନ୍ତୁ (i), (ii), (iii) ଓ (iv) ପରିପ୍ରକାଶରେ (ବହୁପଦ ରାଶି), ଚଳରାଶି x ର ଘାତାଙ୍କ ରଣାତ୍ମକ ଅଥବା ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

ତେବେ ଆମେ (1), (2) ଓ (3) ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକୁ, (i), (ii), (iii) ଓ (iv) ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକଠାରୁ କିପରି ଭିନ୍ନ ଉପାୟରେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା ?

ଏଠାରେ ମନେରଖିବା ଯେ, (i), (ii), (iii), (iv) ଏବଂ (1), (2), (3) ଏମାନେ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ । କିନ୍ତୁ ପୃଥକ୍ କରି ପ୍ରକାଶ କରିବା ନିମନ୍ତେ (i), (ii), (iii) ଓ (iv) ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକୁ ଅଲଗା ଭାବରେ ନାମକରଣ କରିବା ଯାହାକୁ **ପଲିନୋମିଆଲ୍** କହିବା ।

ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିବା ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯେଉଁ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକରେ ଚଳରାଶିର ଘାତାଙ୍କ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Polynomial) କୁହାଯାଏ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ନିମ୍ନ ଦତ୍ତ ଉଦାହରଣ ଗୁଡ଼ିକର କେବଳ ଏକ ମାତ୍ର ଚଳରାଶି 'x' ରହିଛି । ଏଗୁଡ଼ିକୁ 'x'ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ । (i) $3x$, (ii) $2x + 3$ (iii) $5x^2 - 2x - 3$, (iv) $x^4 + 3x^2 - 9x + 5$

ବି.ଦ୍ର. : ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଆଲୋଚନା କେବଳ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ କରାଯିବ ।

3.2.1 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ :

ପଲିନୋମିଆଲରେ ଥିବା ଚଳରାଶି (x ର) ଉଚ୍ଚତମ ଘାତାଙ୍କକୁ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲର ଘାତ କୁହାଯାଏ । ପ୍ରକାଶ ଥାଉକି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉଚ୍ଚତମ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ପଦର ସହଗ ଅଣଶୂନ୍ୟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : (i) ଓ (ii) ପଲିନୋମିଆଲର ଘାତ 1 ଥିବା ବେଳେ, (iii) ଓ (iv) ରେ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ ଯଥାକ୍ରମେ 2 ଓ 4 ।

ନିଜେ କର

1. $x+1$ ଏକ ଏକଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ । ଏହାକୁ $0.x^2+x+1$ ଆକାରରେ ଲେଖିଲେ ଏହାର ଘାତ କେତେ ହେବ ?
2. $x^2 + x + 1$ କୁ $0.x^3 + x^2 + x + 1$ ଆକାରରେ ଲେଖିଲେ ଏହା ଏକ ତିନିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହେବ କି ?

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଉଦାହରଣ –1 : ନିମ୍ନ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଘାତ ସ୍ଥିର କର ।

(i) $5x^2 + 13x - 9$, (ii) $y^3 + 17y$, (iii) $2p + 3$, (iv) -5

ସମାଧାନ : (i) $5x^2 + 13x - 9$ ର ଘାତ 2 ।

ତେଣୁ ଏହାକୁ ଏକ **ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Second degree Polynomial)** କୁହାଯାଏ ।

(ii) $y^3 + 17y$ ର ଘାତ 3 । ତେଣୁ ଏହାକୁ ଏକ **ତ୍ରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Third degree Polynomial)** କୁହାଯାଏ ।

(iii) $2p + 3$ ର ଘାତ 1 । ତେଣୁ ଏହାକୁ **ଏକଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (First degree ଅଥବା Linear Polynomial)** କୁହାଯାଏ ।

(iv) -5 ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ । କାରଣ ଏହା $-5x^0$ ଆକାରରେ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇ ପାରିବ ।

ସୁତରାଂ -5 ଏକ **ଶୂନଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ।**

ଟୀକା :– (1) ଯେକୌଣସି ଅଣଶୂନ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏକ '0' ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହୋଇପାରିବ । ଏହାକୁ **ଧ୍ରୁବ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Constant Polynomial)** କୁହାଯାଏ ।

(2) ସଂକ୍ଷେପରେ ଦୁଇଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ Quadratic Polynomial, ତିନିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ Cubic Polynomial ଏବଂ ଚାରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ Biquadratic ଅଥବା Quartic Polynomial କୁହାଯାଏ ।

3.2.2 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦ :

ପଲିନୋମିଆଲର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦକୁ ମନୋମିଆଲ୍ (Monomial) କୁହାଯାଏ ।

ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଯଦି ଏକପଦୀ ହୋଇଥାଏ ତେବେ ଏହାକୁ ମନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ ।

ସେହିପରି ପଲିନୋମିଆଲ୍, ଦୁଇଟି ମନୋମିଆଲ୍‌କୁ ନେଇ ଗଠିତ ହୋଇଥିଲେ, ତାକୁ ଦ୍ୱିପଦୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Binomial) କୁହାଯାଏ ଏବଂ ତିନି ସଂଖ୍ୟକ ମନୋମିଆଲ୍ ଠାରୁ ଅଧିକ ଥିଲେ, ଆମେ କେବଳ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ବୋଲି କହିବା ।

3.2.3 ମନୋମିଆଲ୍‌ର ସହଗ :

$x^2 - 2x - 3$ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ । ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ । ପଦଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ କେତେକ ଉତ୍ପାଦକ (Factor)ର ଗୁଣଫଳ ହୋଇପାରେ । **କୌଣସି ପଦର ସାଂଖ୍ୟିକ ଉତ୍ପାଦକଟିକୁ ଉକ୍ତ ପଦର ସହଗ କୁହାଯାଏ ।** ଏଠାରେ $x^2 = 1 \times x^2$ ଏବଂ $-2x = -2 \times x$ ତେଣୁ x^2ର ସାଂଖ୍ୟିକ ସହଗ 1 ଏବଂ $-2x$ର ସାଂଖ୍ୟିକ ସହଗ -2 । ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ତୃତୀୟପଦ -3 ।

$-3 = -3 \times x^0$ ହେତୁ -3, x^0ର ସହଗ ବା -3 ଏକ ଧ୍ରୁବକ ବୋଲି କହିପାରିବା ।

ନିଜେ କର

1. $2x - 5$ ଓ $3x^2 - 2x + 7$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ ଥିବା ପଦଗୁଡ଼ିକର ସହଗଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କର ।

2. ଦୁଇଟି ଲେଖାଏଁ ଦ୍ୱିପଦୀ ଏବଂ ତ୍ରିପଦୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ନେଇ, ସେମାନଙ୍କର ପଦସଂଖ୍ୟା, ଘାତ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦର ସାଂଖ୍ୟିକ ସହଗଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।

3.2.4. ସଦୃଶ ପଦ (Like Monomials) :

ଯଦି ଏକ ଚଳରାଶି ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଦୁଇଟି ମନୋମିଆଲ୍ ବା ଏକାଧିକ ମନୋମିଆଲ୍ ସମାନ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କୁ ସଦୃଶ ମନୋମିଆଲ ବା ସଦୃଶ ପଦ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ 2x, 9x, –5x ଇତ୍ୟାଦି ସଦୃଶ ମନୋମିଆଲ୍ ।

ସେହିପରି $-3x^2, x^2, 7x^2$ ଇତ୍ୟାଦି ମଧ୍ୟ ସଦୃଶ ମନୋମିଆଲ୍ ଅଟନ୍ତି । ମାତ୍ର 2x, 3y, 5z, ଇତ୍ୟାଦି ସଦୃଶ ପଦ ନୁହଁନ୍ତି ।

ଟୀକା :(1) ଆମର ଆଲୋଚନା କେବଳ ଏକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସୀମିତ ରହିବ ।

(2) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଚଳରାଶି କହିଲେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିକୁ ବୁଝିବ ।

3.3 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗ :

ସଦୃଶ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗ :

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ ।

(i) $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମର ପ୍ରୟୋଗ)

(ii) $\frac{2x^2}{5} + 3x^2 = \left(\frac{2}{5}+3\right)x^2 = \frac{17}{5}x^2$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମର ପ୍ରୟୋଗ)

ଯୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧରେ କେତୋଟି ଜାଣିବା କଥା :

(i) ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ସଦୃଶ ପଦମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ । (ଉପର ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ)

(ii) ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲାଗି ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଏକାଠି କରି ଯୋଗ କରାଯାଏ ।

(iii) ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ସୁବିଧା ଲାଗି ପ୍ରଥମେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦଗୁଡ଼ିକ ଚଳରାଶିର ଘାତ ଅନୁଯାୟୀ (ଅଧଃକ୍ରମ ବା ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମ) ଲେଖାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ –2 : ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର: $(7x + 8x^2+10)$ ଏବଂ $(3x^2+4x+30)$

ସମାଧାନ :

(i) ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ : ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ବଡ଼ରୁ ସାନ କ୍ରମରେ ଲେଖି ଯୋଗ କରାଯାଏ ।

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (7x + 8x^2 + 10) + (3x^2 + 4x + 30)$

$= (8x^2 + 7x + 10) + (3x^2 + 4x + 30)$

$= (8x^2 + 3x^2) + (7x + 4x) + (10 + 30)$ (ସଦୃଶ ପଦ ଏକାଠି କରାଗଲା)

$= (8+3)x^2 + (7 + 4)x + (10 + 30)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରାଗଲା)

$= 11x^2 + 11x + 40$

(ii) ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ : ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ଧାଡ଼ିରେ ନ ଲେଖି ସ୍ତମ୍ଭ ଆକାରରେ ଲେଖି ଯୋଗ କରାଯାଏ ।

ପ୍ରଥମ : $8x^2 + 7x + 10$

ଦ୍ୱିତୀୟ : $3x^2 + 4x + 30$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (8+3)x^2 + (7+4)x + (10 + 30) = 11x^2 + 11x + 40$

ଉଦାହରଣ-3 : **ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :** $(2x^2-3+5x), (6-2x-x^2)$ ଏବଂ $(5x+3x^2-4)$

ସମାଧାନ : (ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (2x^2-3+5x) + (6-2x-x^2) + (5x+3x^2-4)$

$= (2x^2+5x-3) + (-x^2-2x+6) + (3x^2+5x-4)$

$= (2x^2-x^2+3x^2) + (5x-2x+5x) + (-3+6-4)$

$= (2-1+3)x^2 + (5-2+5)x + (-3+6-4) = 4x^2 + 8x - 1$

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ : ପ୍ରଥମ : $2x^2+5x-3$

ଦ୍ୱିତୀୟ : $-x^2-2x+6$

ତୃତୀୟ : $3x^2+5x-4$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (2-1+3)x^2 + (5-2+5)x + (-3+6-4) = 4x^2 + 8x - 1$

ଉଦାହରଣ-4 : **ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :**

$(3x^3-4x+7)$, $(4-3x^2+8x+4x^3)$ ଏବଂ $(7x^3-2x^2+9)$

ସମାଧାନ : (ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (3x^3-4x+7)+(4-3x^2+8x+4x^3)+(7x^3-2x^2+9)$

$= (3x^3-4x+7)+(4x^3-3x^2+8x+4)+(7x^3-2x^2+9)$

$= (3x^3+4x^3+7x^3)+(-3x^2-2x^2)+(-4x+8x)+(7+4+9)$

$= (3+4+7)x^3+(-3-2)x^2+(-4+8)x+(7+4+9)$

$= 14x^3-5x^2+4x+20$

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ : $3x^3-0.x^2-4x+7$ (x^2 ର ସହଗକୁ '0' ନିଆଗଲା)

$4x^3-3x^2+8x+4$

$7x^3-2x^2+0.x+9$ (x ର ସହଗକୁ '0' ନିଆଗଲା)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (3+4+7)x^3+(-3-2)x^2+(-4+8)x+(7+4+9)$

$= 14x^3-5x^2+4x+20$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(a)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $3x+2x = (3+ ....)\ x = ...$

(ii) $5x + 7x = (.... + 7)\ x = ...$

(iii) $-6x + 4x = \{(...) + (...)\}\ x = ...$

(iv) $-2x - 3x = \{(...) + (...)\}x = ...$

(v) $x - 2x = \{(...) + (...)\}x = ...$

2. ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $4x$ ଓ $3x$ (ii) $2x$ ଓ $-3x$ (iii) $-3x^3$ ଓ $-2x^3$ (iv) $-5x^2$ ଓ $2x^2$

(v) $4x$ ଓ -4 (vi) $2x^2+3$ ଓ x^2-1 (vii) x^2+1 ଓ $x-1$ (viii) x^2+3+2x ଓ $x+1$

3. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $3x + 2x = (\quad)$ (ii) $(\quad) + x = 8x$

(iii) $2x + (\quad) = 6x$ (iv) $3x + 4x = 4x + (\quad)$

(v) $2x + 5x = (\quad) + 2x = (\quad)$ (vi) $2x + 5y + z = (\quad) + z = (2x+z) + (\quad)$

4. ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $2x,\ 3x,\ 5x$ (vi) $2x^2 + x - 2$ ଓ $x+2$

(ii) $5x^2,\ x^2,\ 3x^2$ (vii) $5 - 2x + x^2$ ଓ $x^2 + 2x - 5$

(iii) $2x^3,\ 3x^3,\ 4x^3$ (viii) $3x - 2 + x^2$ ଓ $x^2 + 3x - 2$

(iv) $3x^2 + 2x$ ଓ $x^2 + 3x$ (ix) $1 + 2x^2 - 3x$ ଓ $2x + 3 + 4x^2$

(v) $x^3 + 3$ ଓ $4 - x^2 + x$ (x) $2x^2 - 4x - 3$ ଓ $4x + 3 - 2x^2$

3.4 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ବିୟୋଗ :

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ, a ରୁ b ବିୟୋଗ କରିବା ଯାହା a ସହ b ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଯୋଗକରିବା ତାହା, ତେଣୁ ଲେଖିବା $a - b = a + (-b)$

ଏହି ପଦ୍ଧତି ଅବଲମ୍ବନ କରି ଆମେ ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ବିୟୋଗ ଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ।

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ – 5 : (ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ) $(3x^2 - 6x + 17)$ ରୁ $(5x - 3x^2 + 19)$ ର ବିୟୋଗ କର ।

ସମାଧାନ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗ ଫଳ $= (3x^2 - 6x + 17) - (5x - 3x^2 + 19)$

$= (3x^2 - 6x + 17) + (3x^2 - 5x - 19)$

$= (3x^2 + 3x^2) + (-6x - 5x) + (17 - 19)$

$= (3 + 3)x^2 + (-6 - 5)x + (17 - 19)$

$= 6x^2 - 11x - 2$

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ : $3x^2 - 6x + 17$

$-3x^2 + 5x + 19$

$(+)\quad(-)\quad(-)$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗ ଫଳ $= (3 + 3)x^2 + (-6 - 5)x + (17 - 19) = 6x^2 - 11x - 2$

ଉଦାହରଣ – 6 : $(4x^3 - 2x^2 + 5)$ ରୁ $(2x^3 - 3 - 5x)$ ର ବିୟୋଗ କର ।

ସମାଧାନ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗ ଫଳ $= (4x^3 - 2x^2 + 5) - (2x^3 - 3 - 5x)$

$= (4x^3 - 2x^2 + 5) + (-2x^3 + 3 + 5x)$

$= (4x^3 - 2x^2 + 5) + (-2x^3 + 5x + 3)$

$= (4x^3 - 2x^3) + (-2x^2) + 5x + (5 + 3)$

$= (4 - 2)x^3 + (-2x^2) + 5x + (5 + 3)$

$= 2x^3 - 2x^2 + 5x + 8$

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ : $4x^3 - 2x^2 + 0.x + 5$

$2x^3 + 0.x^2 - 5x - 3$

(–) (–) (+) (+)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗଫଳ $= (4 - 2)x^3 + (-2x^2) + 5x + (5 + 3)$

$= 2x^3 - 2x^2 + 5x + 8$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(b)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) $5x - 3x = 5x + (\ ) = \{(\ ) + (\ )\}\ x = (...)$

(ii) $3x - (-2x) = 3x + (\ ) = \{(\ ) + (\ )\}\ x = (...)$

(iii) $-2x - 3x = -2x + (\ ) = \{(\ ) + (\ )\}\ x = (...)$

(iv) $(2+3x) - (3-2x) = (2+3x) + (...) = (2-3) + (3x+...) = (...)+(...)$

(v) $(x - 4) - (-3x+2) = (x - 4) + (...) = (x+3x) + (...) = ...+...$

2. ବିୟୋଗ କର :

(i) $12x$ ରୁ $9x$ (ii) $5x$ ରୁ $-3x$ (iii) $-2x$ ରୁ $3x$

(iv) $-4x$ ରୁ $-6x$ (v) $(x+2)$ ରୁ $(3x+2)$ (vi) 3 ରୁ x^2+x+1

(vii) $2x^2 - 2x - 2$ ରୁ $x^2 + 2x + 4$

3. ବିୟୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $2x^2 + 2x$ ରୁ $2x^2$ (ii) $5x^2+3x$ ରୁ $x^2 + 3x$

(iii) $2x^2 - 2x$ ରୁ $x^2 + 2x$ (iv) $3x^2 + 3x + 2$ ରୁ $x^2 + 3x - 2$

(v) $2x^2 - 5x - 1$ ରୁ $x^2 + 5x - 1$ (vi) $4 + 3x + 2x^2 + x^3$ ରୁ $x^3 + 2x^2 - 3x - 4$

(vii) $2x^3 - 5 - 2x^2 - 10x$ ରୁ $x^3 + 20x - x^2 + 3$

3.5 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ :

(a) ଏକ ମନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଅନ୍ୟ ଏକ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ :

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ,

$3 \times x = 3x,\quad x \times x = x^2,\quad x \times x^2 = x^3,\quad 2x^2 \times x = 2x^3$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଗୁଣନ ଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର :

(i) $2x \times 3x = (2 \times 3) \times (x \times x) = 6x^2$

(ii) $5x \times 4x^2 = (5 \times 4) \times (x \times x^2) = 20x^3$

(iii) $-7y \times 3y^3 = (-7 \times 3) \times (y \times y^3) = -21y^4$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଜାଣିପାରିବ ଯେ,

(i) ଦୁଇଟି ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ଏକ ମନୋମିଆଲ୍ ଅଟେ ।

(ii) ଦୁଇଟି ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳର ସହଗ = ପ୍ରଥମ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ସହଗ x ଦ୍ୱିତୀୟ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ସହଗ

(iii) ତିନି ବା ତତୋଧିକ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ହେଲେ, ପ୍ରଥମେ ପ୍ରଥମ ଦୁଇଟିର ଗୁଣଫଳ ବାହାର କରାଯାଏ । ତତ୍ପରେ ଉକ୍ତ ଗୁଣଫଳକୁ ତୃତୀୟ ମନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଗୁଣନ କରାଯାଏ ।

ଏହିପରି ପରବର୍ତ୍ତୀ ମନୋମିଆଲ୍‌କୁ ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଗୁଣଫଳ ସହ ଗୁଣନ କରାଯାଇ ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରାଯାଇପାରେ ।

(iv) ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ କ୍ରମବିନିମୟୀ ଓ ସହଯୋଗୀ ନିୟମକୁ ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇପାରେ ।

(b) ଏକ ମନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଏକ ବାଇନୋମିଆଲ୍ ଓ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ :

$2x$ ଓ $(3x+5)$ ର ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରିବା ।

$2x \times (3x+5) = 2x \times 3x + 2x \times 5$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= 6x^2 + 10x$

ସେହିପରି ଅନ୍ୟ ଏକ ଉଦାହରଣ ନେବା ।

$-3y$ ଓ $(6 - 7y)$ ର ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରିବା ।

$-3y \times (6 - 7y) = -3y \times \{6 + (-7y)\} = (-3y) \times 6 + (-3y) \times (-7y) = -18y + 21y^2$

ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ତୁମେମାନେ ଏକ ମନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ କରିପାରିବ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ : $2x \times (x^2+3x+5)$

$= 2x \times x^2 + 2x \times 3x + 2x \times 5 = 2x^3 + 6x^2 + 10x$

(c) ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସହିତ ଅନ୍ୟ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ :

ଦୁଇଗୋଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲାବେଳେ ଆମେ ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରିଥାଉ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ : $(2x + 1)$ ଏବଂ $(x+3)$ ର ଗୁଣଫଳ ଅର୍ଥାତ୍

$(2x + 1)(x+3) = 2x(x + 3) + 1(x + 3)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= 2x^2 + 6x + x + 3 = 2x^2 + 7x + 3$ (ପୁନଃ ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

ସେହିପରି $(2x^2 + 1)$ ଏବଂ $(x-5)$ର ଗୁଣଫଳ

$= (2x^2 + 1)(x - 5) = 2x^2(x - 5) + 1(x - 5)$

$= 2x^2 \times x + 2x^2 \times (-5) + 1 \times (x) + 1 \times (-5) = 2x^3 - 10x^2 + x - 5$

ଗୁଣନ ପରେ ଗୁଣଫଳରେ ଥିବା ସଦୃଶପଦମାନଙ୍କୁ ଏକତ୍ର କରି ଦିଆଯାଏ ଓ x ର ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଉତ୍ତର ଲେଖାଯାଏ ।

ଟୀକା : ବଣ୍ଟନ ନିୟମ : $a(b+c) = ab + ac$ ବା $(b+c)a = ba + ca = ab + ac$

ମନେରଖ :

(i) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ 0 (ଶୂନ) ଦ୍ୱାରା ଗୁଣିଲେ, ଗୁଣଫଳ ଶୂନ ହୁଏ ।

(ii) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ 1 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣିଲେ, ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି ନିଜେ ଗୁଣଫଳ ହୋଇଥାଏ ।

(iii) ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଆରମ୍ଭ କରିବା ପୂର୍ବରୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖାଯାଏ ।

(iv) ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଗୁଣନ କରାଯାଏ ।

(v) ଗୁଣଫଳର ସଦୃଶ ପଦମାନଙ୍କୁ ସଜାଇ ଏକତ୍ର ଲେଖି ସରଳ କରାଯାଏ ।

(vi) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ କ୍ରମବିନିମୟୀ ଓ ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହୋଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ-7 : ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(x + 4)$ ଏବଂ $(3x - 5)$

ସମାଧାନ : ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ = $(x + 4)\ (3x - 5) = x(3x - 5) + 4(3x - 5)$

$= x.\,3x + x\,.\,(-5) + 4.3x + 4.\,(-5)$

$= 3x^2 - 5x + 12x - 20 = 3x^2 + 7x - 20$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର **ଦୁଇଟି ଏକଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳରେ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ ।**

ଉଦାହରଣ-8 : $(x+2)$, $(x-1)$ ଏବଂ $(2x-5)$ ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ = $(x+2)\ (x-1)(2x-5) = \{(x+2) \times (x-1)\} \times (2x-5)$

$= \{(x+2)x + (x + 2)(-1)\} \times (2x-5) = (x^2 + 2x - x - 2)\ (2x - 5)$

$= (x^2 + x - 2)\ (2x - 5) = (x^2 + x - 2)2x + (x^2 + x - 2)\ (-5)$

$= 2x^3 + 2x^2 - 4x - 5x^2 - 5x + 10 = 2x^3 + 2x^2 - 5x^2 - 4x - 5x + 10$

$= 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

ଉଦାହରଣ-9 : ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(x^2 + x + 1)$ ଏବଂ $(x^2 - x + 1)$

ସମାଧାନ : ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ = $(x^2 + x + 1)\ (x^2 - x + 1)$

$= x^2.\,(x^2 - x + 1) + x.\,(x^2 - x + 1) + 1.\,(x^2 - x + 1)$

$= x^2.\,x^2 + x^2\,(-x) + x^2.\,1 + x.\,x^2 + x\,.\,(-x) + x.\,1 + x^2 - x + 1$

$= x^4 - x^3 + x^2 + x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1$

$= x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 + x^2 + x - x + 1 = x^4 + x^2 + 1$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର, **ଦୁଇଟି ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ଏକ ଚାରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଅଟେ ।**

ଉଦାହରଣ-10 : ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(2x + 5)$ ଏବଂ $(x^2 + 3x - 7)$

ସମାଧାନ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ = $(2x + 5)\ (x^2 + 3x - 7)$

$= 2x\,.\,(x^2 + 3x - 7) + 5\ (x^2 + 3x - 7)$

$= 2x\,.x^2 + 2x\,.3x + 2x\,.(-7) + 5\,.\,x^2 + 5.3x + 5.(-7)$

$= 2x^3 + 6x^2 - 14x + 5x^2 + 15x - 35$

$= 2x^3 + 6x^2 + 5x^2 - 14x + 15x - 35 = 2x^3 + 11x^2 + x - 35$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(c)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) $3 \times 5x = (...)$ (ii) $3x^2 \times 2x^2 = (...)$

(iii) $2x \times 0 = (...)$ (iv) $3x^3 \times 1 = (...)$

2. ନିମ୍ନ ସାରଣୀଟିକୁ ପୂରଣ କର :

ପ୍ରଥମ ମନୋମିଆଲ୍ → ଦ୍ୱିତୀୟ ମନୋମିଆଲ୍ ↓	$2x$	$-5x$	$3x^2$	$-4x$	$7x^2$	$9x^3$
$2x$					$14x^3$	
$-5x$			$-15x^3$			
$3x^2$						
$-4x$		$20x^2$				
$7x^3$						
$-9x^2$						

3. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) $3 \times (2x - 7) = 3 \times 2x + 3 \times$ (.........)

(ii) $(-2) \times (3x + 1) = (-2) \times 3x + (-2) \times$ (.........)

(iii) $(2x - 6) \times (-x) = 2x \times$ (.........) + (.........) $(-x)$

(iv) $(-3x^2)(2x + 4) =$ (.........) $\times 2x + (-3x^2) \times$ (.........)

4. ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $(x - 1) \times (x + 1)$ (ii) $(x - 1) \times (x^2 + x + 1)$ (iii) $(x + 1) \times (x^2 - x + 1)$

(iv) $(2x+1) \times (x - 2)$ (v) $(2x+3) \times (x^2 - 2x + 5)$ (vi) $(-x-3) \times (x^2 - 5x - 2)$

(vii) $(x^2 + 1) \times (x^2 - 1)$ (viii) $(x^2 + 1) \times (2x^2 - x + 1)$ (ix) $(x^2 - 1) \times (x^2 + x + 1)$

3.6 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଭାଗକ୍ରିୟା :

ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସହ ତୁମେ ଅଭ୍ୟସ୍ତ । ତେଣୁ କୁହ $20x \div 5$ ଭାଗକ୍ରିୟାର ଭାଗଫଳ ଆମେ କିପରି ପାଇବା ? ତେଣୁ ଆମକୁ ପ୍ରଥମେ ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ହେବ ଯେ $5 \times$ (କେତେ ?) $= 20x$

ତେଣୁ ତୁମେ ସହଜରେ ଜାଣିପାରିବ ଯେ $5 \times (4x) = 20x$ $\therefore\ 20x \div 5 = \frac{20x}{5} = 4x$

(ନିଜେ କର) ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀଟି ପୂରଣ କର ।

$2x \times 7 =$ ——	—— $\times 7 = 14x$	$\frac{14x}{7} =$ ——
$3x \times 8 =$ ——	—— $\times 8 = 24x$	$\frac{24x}{8} =$ ——
$4x \times 6 =$ ——	—— $\times 6 = 24x$	$\frac{24x}{6} =$ ——
$x \times a =$ ——	—— $\times a = ax$	$\frac{ax}{a} =$ ——, $a \neq 0$

(a) ଶୂନଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (ଧ୍ରୁବରାଶି) ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟାର କେତେକ ଉଦାହରଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

(i) $10x \div 5 = \frac{10x}{5} = 2x$

(ii) $(21x + 7) \div 7 = \frac{21x+7}{7} = \frac{21x}{7} + \frac{7}{7} = 3x + 1$

ମନେରଖ : ଯଦି $c \neq 0$ ହୁଏ, ତେବେ $(ax+b) \div c = \frac{ax+b}{c} = \frac{a}{c}x + \frac{b}{c}$

ଆବଶ୍ୟକତା ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସ୍ଥିର କରିବା : $x^2 \div x$ ର ଅର୍ଥ କ'ଣ ?

$x^2 \div x = \frac{x^2}{x} = \frac{x \times x}{x} = x$ $(X \neq O)$

ମନେରଖ : ଯଦି $x \neq 0$ ହୁଏ, ତେବେ $\frac{x}{x} = 1$ ହେବ ।

(b) ବର୍ତ୍ତମାନ ଏକଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟାର କେତେକ ଉଦାହରଣ ଦେଖ ।

(i) $20x^2 \div 5x = \frac{20x^2}{5x} = \frac{20 x \times x}{5x} = 4x$

(ii) $(20x^2 + 10x) \div 5x = \frac{20x^2 + 10x}{5x} = \frac{20x^2}{5x} + \frac{10x}{5x} = 4x + 2$

ଉଦାହରଣ – 11 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $12x \div 4$ (ii) $15x^2 \div 5$ (iii) $24x^2 \div 8x$

ସମାଧାନ : (i) $12x \div 4$ କେତେ, ଏହା ପାଇବା ଲାଗି ଆମେ ସ୍ଥିର କରିବା :

$4 \times$ (କେତେ ?) $= 12x$

ଆମେ ଜାଣୁ, $4 \times 3 = 12$ $\therefore 4 \times 3x = 12x$ ତେଣୁ $12x \div 4 = 3x$

(ii) $15x^2 \div 5$ କେତେ, ଏହା ପାଇବା ପାଇଁ ଆମେ ସ୍ଥିର କରିବା :

$5 \times$ (କେତେ ?) $= 15x^2$ ଆମେ ଜାଣୁ $5 \times 3 = 15$ ତେଣୁ $5 \times 3x^2 = 15x^2$ $\therefore 15x^2 \div 5 = 3x^2$

(iii) $24x^2 \div 8x =$ କେତେ ସ୍ଥିର କରିବା ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ସ୍ଥିର କରିବା : $8 \times$ (କେତେ ?) $= 24$ ଓ $x \times$ (କେତେ ?) $= x^2$

ଆମେ ଜାଣୁ $8 \times (3) = 24$ ଓ $x \times (x) = x^2$ $\therefore 8x \times 3x = 24x^2$ ତେଣୁ $24x^2 \div 8x = 3x$

ଉଦାହରଣ– 12 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $3x^2 + 9x \div 3x$ (ii) $2x^2 + 6x \div 2x$ (iii) $24x^3 - 16x^2 + 8x \div 4x$

ସମାଧାନ :– (i) $\frac{3x^2 + 9x}{3x} = \frac{3x^2}{3x} + \frac{9x}{3x} = x + 3$

(ii) $\frac{2x^2 + 6x}{2x} = \frac{2x^2}{2x} + \frac{6x}{2x} = x + 3$

(iii) $\frac{24x^3 - 16x^2 + 8x}{4x} = \frac{24x^3}{4x} - \frac{16x^2}{4x} + \frac{8x}{4x} = 6x^2 - 4x + 2$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(d)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $3 \times (\text{—}) = 12x$ (ii) $2x \times (\text{—}) = 12x^2$

(iii) $4 \times (\text{—}) = -16x^2$ (iv) $-3x \times (\text{—}) = 15x^2$

ଭାଗଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

2. (i) $8x \div 4$ (ii) $8x \div (-4)$ (iii) $(-8x) \div 4$ (iv) $(-8x) \div (-4)$

3. (i) $21x^2 \div 3$ (ii) $-21x^2 \div 3x$ (iii) $21x^2 \div (-7x)$

(iv) $21x^2 \div 3x^2$ (v) $21x^2 \div (-3x^2)$

4. (i) $(15x^2 + 10) \div 5$ (ii) $(16x^2 - 12) \div 4$

(iii) $(24x^2 - 8x+12) \div 4$ (iv) $(20x^2 + 15x) \div 5x$

(v) $(24x^2 + 20x) \div 4x$ (vi) $(48x^2 - 44x) \div (-4x)$

3.7 ବିସ୍ତୃତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ଭାଗକ୍ରିୟା:

ମନେକର ଆମେ $12x^2 + 9x$ କୁ $3x$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ।

ଏଠାରେ ଭାଜ୍ୟ $= 12x^2 + 9x$, ଭାଜକ $= 3x$

ଭାଜକ $3x$କୁ ଯେଉଁ ରାଶିରେ ଗୁଣିଲେ ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦ $12x^2$ ମିଳିବ, ତାହା ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ ହେବ । ଭାଜକ $3x$ କୁ ଯେଉଁ ରାଶିରେ ଗୁଣିଲେ ଭାଜ୍ୟର ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ $9x$ ମିଳିବ, ତାହାହେବ ଭାଗଫଳର ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ ।

ଆମେ ନିମ୍ନମତେ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ଦେଖାଇବା ।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x + 3 \\ \hline
3x & 12x^2 + 9x \\
 & 12x^2 \\
 & (-) \\ \hline
 & \quad + 9x \\
 & \quad + 9x \\
 & \quad (-) \\ \hline
 & \quad\quad 0
\end{array}
$$

ଏକାଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍– ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟା

ଏକାଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟାର ବିଭିନ୍ନ ସୋପାନ ଓ କେତେକ ଉଦାହରଣ ନିମ୍ନରେ ଦେଖ ।

ଭାଗକ୍ରିୟାର ବିଭିନ୍ନ ସୋପାନ :

(i) ଏକାଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକ୍ରିୟା ସମୟରେ ପ୍ରଥମେ ଭାଜ୍ୟ ଓ ଭାଜକ ଉଭୟର ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ବଡ଼ରୁ ସାନ (ବା ସାନରୁ ବଡ଼) ଘାତ କ୍ରମରେ ସଜାଇବା ଆବଶ୍ୟକ ।

(ii) ଭାଜକ ଏକାଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ ମଧ୍ୟ ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ ସ୍ଥିର କରାଯାଏ ।

(iii) ଭାଜକ ଓ ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦର ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଯାଏ ।

(iv) ନିର୍ଣ୍ଣିତ ବିୟୋଗଫଳକୁ ପରବର୍ତ୍ତୀ ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଭାଜ୍ୟ ରୂପେ ନିଆଯାଏ । ପୁନଶ୍ଚ ଏହି ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଯାଇ ଭାଗଫଳର ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ ସ୍ଥିର କରାଯାଏ ।

ଏହିପରି ଭାବରେ ଭାଗଶେଷ 0 ହେବା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସମ୍ପାଦନ କରାଯାଇ ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 13 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର: $(x^3 + x^2 + x + 6) \div (x + 2)$

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 3 \\
\hline
x+2 & x^3 + x^2 + x + 6 \\
 & x^3 + 2x^2 \\
 & (-)\ (-) \\
\hline
 & -x^2 + x + 6 \\
 & -x^2 - 2x \\
 & (+)\quad (+) \\
\hline
 & 3x + 6 \\
 & 3x + 6 \\
 & (-)\ (-) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

ଟୀକା :- ଯେଉଁ ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ବିୟୋଗଫଳର ଘାତ, ଭାଜକର ଘାତ ଠାରୁ କମ୍ ହେବ , ସେହି ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଭାଗକ୍ରିୟା ଶେଷ ହେବ ଏବଂ ପ୍ରାପ୍ତ ବିୟୋଗଫଳ ହେବ ଭାଗଶେଷ ।

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଭାଗଫଳ $= x^2 - x + 3$

ଦତ୍ତ ଭାଗକ୍ରିୟା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସୂଚନା :

ପ୍ରଥମ ସୋପାନ : ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦରେ ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ x^2 ହେଲା ।

$\therefore$ ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ $= x^2$

ନିର୍ଣ୍ଣିତ ଭାଗଫଳ x^2 ଓ ଭାଜକର ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଗଲା ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ସୋପାନ : ଉପରିସ୍ଥ ବିୟୋଗଫଳ ଏହି ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଭାଜ୍ୟ ହେଲା ।

ଏହି ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମପଦ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକରି ମିଳିଥିବା ଭାଗଫଳ ହେଲା $(-x)$ ।

$\therefore$ ଭାଗଫଳର ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ $= -x$

ଏହି ସୋପାନର ନିର୍ଣ୍ଣିତ ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଜକର ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଗଲା ।

ତୃତୀୟ ସୋପାନ : ଉପରିସ୍ଥ ବିୟୋଗଫଳ ଏହି ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଭାଜ୍ୟ ହେଲା ।

ଏହି ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଭାଗଫଳ ହେଲା 3 ।

$\therefore$ ଭାଗଫଳର ତୃତୀୟ ପଦ $= +3$

ଏହି ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ମିଳିଥିବା ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଜକର ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଗଲା ।

ବିୟୋଗଫଳ (ଅର୍ଥାତ୍ ଭାଗଶେଷ) 0 ହେବାରୁ ଭାଗକ୍ରିୟା ଶେଷ ହେଲା ଏବଂ ଭାଗକ୍ରିୟା ତିନି ସୋପାନରେ ମିଳିଥିବା ଭାଗଫଳ ତ୍ରୟର ସମଷ୍ଟି ନେବାରୁ ଭାଗଫଳ ହେଲା $(x^2 - x + 3)$ ।

ଉଦାହରଣ –14 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(-8x^3 + 12x^2 - 6x + 1) \div (2x - 1)$

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{r|l}
 & -4x^2 + 4x - 1 \\
\hline
2x-1 & -8x^3 + 12x^2 - 6x + 1 \\
 & -8x^3 + 4x^2 \\
 & (+) \quad (-) \\
\hline
 & 8x^2 - 6x + 1 \\
 & 8x^2 - 4x \\
 & (-) \quad (+) \\
\hline
 & -2x + 1 \\
 & -2x + 1 \\
 & (+) \quad (-) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଭାଗଫଳ $= -4x^2 + 4x - 1$

ଉଦାହରଣ –15 : ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $(x^3 - 5x + 2) \div (x - 2)$

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x - 1 \\
\hline
x-2 & x^3 \qquad\quad - 5x + 2 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
 & (-) \quad (+) \\
\hline
 & 2x^2 - 5x + 2 \\
 & 2x^2 - 4x \\
 & (-) \quad (+) \\
\hline
 & -x + 2 \\
 & -x + 2 \\
 & (+) \quad (-) \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଭାଗଫଳ $= x^2 + 2x - 1$

ଟୀକା : ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ, ଭାଜ୍ୟରେ ପଦଗୁଡ଼ିକ ଘାତାଙ୍କର ଅଧଃକ୍ରମରେ ସଜ୍ଜିତ ଅଛନ୍ତି, ମାତ୍ର x^2 ଥିବା କୌଣସି ପଦ ଏଥିରେ ନାହିଁ । ଏଣୁ ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଭାଜ୍ୟ ଲେଖିଲାବେଳେ x^3 ଓ $-5x$ ପଦଦ୍ୱୟ ଲେଖିବା ସମୟରେ ଏହି ପଦଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ପଦଲାଗି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ରଖାଯାଇଛି ।

3.7.1. ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ପଦ୍ଧତି (Euclidean Algorithm) :

ଉପରଲିଖିତ ଉଦାହରଣ ଦୁଇଟିରେ ଭାଗଶେଷ 0 ହେଉଛି । ମାତ୍ର 7 କୁ 2 ରେ ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ 0 ହୁଏ ନାହିଁ । ସେହିପରି 9 କୁ 2 ରେ ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ ମଧ୍ୟ 0 ହେବ ନାହିଁ । କାରଣ 7 ରୁ 3 ଥର 2 ନେଲା ପରେ 1 ବଳକା ହୁଏ । ଅର୍ଥାତ $7 = 2 \times 3 + 1$

ସାଧାରଣ ଭାବେ କହିଲେ, **ଭାଜ୍ୟ = ଭାଜକ x ଭାଗଫଳ + ଭାଗଶେଷ**

ଏହାକୁ **ଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ପଦ୍ଧତି (Euclidean Algorithm)** କୁହାଯାଏ ।

ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜ୍ୟକୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ – ଭାଜକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲା ବେଳେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଜଣାଯିବ ଯେ ଗୋଟିଏ ସୋପାନରୁ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସୋପାନକୁ ଭାଜ୍ୟର ଘାତ କ୍ରମଶଃ କମି କମି ଯାଉଛି । ମାତ୍ର ଭାଜକର ଘାତ ସ୍ଥିର ଅଛି । ଏଣୁ ଏକ ସମୟ ଆସିବ ଯେଉଁଠି ଭାଜ୍ୟର ଘାତ ଭାଜକର ଘାତରୁ କମିଯିବ । ଏହି ସମୟରେ ମିଳିଥିବା ରାଶିଟିକୁ ଭାଗଶେଷ କୁହାଯିବ । ଦେଖିବା ଏହ କିପରି ହେଉଛି ।

ଉଦାହରଣ–16 : ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର: $(x^2 + 11x + 21) \div (x + 2)$

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 9 \\
\hline
x + 2 & x^2 + 11x + 21 \\
 & x^2 + 2x \\
 & (-) \quad (-) \\
\hline
 & \qquad 9x + 21 \\
 & \qquad 9x + 18 \\
 & \qquad (-) \ (-) \\
\hline
 & \qquad\qquad 3 \text{ (ଭାଗଶେଷ)}
\end{array}
$$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : ଭାଗଶେଷ 3 ର ଘାତ 0, ଭାଜକ $(x + 2)$ ର ଘାତ (1) ଠାରୁ କମ୍

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $x^2 + 11x + 21 = (x + 2)(x + 9) + 3$

ଅର୍ଥାତ୍ ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଭାଗଫଳ = $x+9$, ଭାଗଶେଷ $=3$

ଉଦାହରଣ–17 : ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର: $(x^3 + 8) \div (x - 2)$

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 2x + 4 \\
\hline
x - 2 & x^3 \qquad\qquad +8 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
 & (-) \quad (+) \\
\hline
 & \quad 2x^2 \qquad + 8 \\
 & \quad 2x^2 - 4x \\
 & \quad (-) \quad (+) \\
\hline
 & \qquad\quad 4x + 8 \\
 & \qquad\quad 4x - 8 \\
 & \qquad\quad (-) \ (+) \\
\hline
 & \qquad\qquad 16 \text{ (ଭାଗଶେଷ)}
\end{array}
$$

ଭାଗଫଳ = $x^2 + 2x + 4$, ଭାଗଶେଷ $=16$

ଉଦାହରଣ–18 : ଏକ ଭାଗପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ଭାଜ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି,

ଭାଜକ = $x+5$, ଭାଗଫଳ = x^2-1 ଓ ଭାଗଶେଷ = -3

ସମାଧାନ : ଭାଜ୍ୟ = ଭାଜକ x ଭାଗଫଳ + ଭାଗଶେଷ

$= (x + 5)(x^2 - 1) + (-3) = x(x^2-1) + 5(x^2 - 1) - 3$

$= x^3 - x + 5x^2 - 5 - 3 = x^3 + 5x^2 - x - 8$

ଉଦାହରଣ-19 : ଯଦି x^2-7x+a, $x-3$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହୁଏ, ତେବେ a ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-4 \\
\hline
x-3 & x^2-7x+a \\
 & x^2-3x \\
 & (-)\ (+) \\
\hline
 & \quad -4x+a \\
 & \quad -4x+12 \\
 & \quad (+)\ (-) \\
\hline
 & \qquad a-12
\end{array}
$$

ଏଠାରେ ଭାଗଶେଷ = $a-12$

କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତ ଅଛି x^2-7x+a, $x-3$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ, ତେଣୁ ଏଠାରେ $a-12=0$ ହେବ ।

$\therefore a = 12$ ହେବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ – 3(e)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) ଭାଜକ = $2x+1$, ଭାଗଶେଷ =0 ଓ ଭାଗଫଳ =$3x$ ହେଲେ ଭାଜ୍ୟ=....(0, $3x$, $2x+1$, $6x^2+3x$)

(ii) ଭାଜ୍ୟ = $3x^2$, ଭାଗଶେଷ = 0, ଓ ଭାଗଫଳ = $3x$ ହେଲେ ଭାଜକ = ... (0, $2x$, $3x$, x...)

(iii) ଭାଜ୍ୟ = $6x^3+4x+1$, ଭାଗଶେଷ =1 ଓ ଭାଜକ = $2x$ ହେଲେ
ଭାଗଫଳ = ...(1, $2x^2+2$, $3x^2+1$, $3x^2+2$)

(iv) ଭାଜକ = $2x^2$, ଭାଜ୍ୟ = $8x^4+6x^2+1$ ଏବଂ ଭାଗଫଳ = $4x^2+3$ ହେଲେ
ଭାଗଶେଷ =...(0, 1, $4x^2+3$, $3x^2+4$)

(v) ଭାଜକ = $4x$, ଭାଗଫଳ =$3x+2$ ଓ ଭାଗଶେଷ = 2 ହେଲେ ଭାଜ୍ୟ = ...
(0, $12x^2$, $12x^2+8x$, $12x^2+8x+2$)

2. ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $(x^2-11x+28) \div (x-4)$

(ii) $(x^2-11x+28) \div (x-7)$

(iii) $(x^2+8x+15) \div (x+3)$

(iv) $(x^2-1) \div (x+1)$

(v) $(x^3+1) \div (x+1)$

(vi) $(x^3-1) \div (x-1)$

(vii) $(2x^3-x^2+x+1) \div (2x+1)$

(viii) $(x^3-4x^2+x+6) \div (-x-1)$

(ix) $(x^3-4x^2+x+6) \div (x-3)$

(x) $(5x^2-4+6x^3) \div (-2+3x)$

3. ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(x^2 + 15x + 56) \div (x + 1)$ (ii) $(x^2 - 12x + 30) \div (x - 1)$

(iii) $(-7 - 6x + 4x^2) \div (2x - 1)$ (iv) $(6x + 27x^3 - 9x^2 + 1) \div (3x - 1)$

(v) $(8x^3 - 1) \div (2x + 1)$ (vi) $(x^3 - 1) \div (-x - 1)$

4. a ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) ଯଦି, $x^2 - 5x + a$, $x + 2$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ; (ii) ଯଦି, $4x^2 - 6x + a$, $2x - 1$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ;

(iii) ଯଦି, $6x^2 - 4x + a$, $3x + 1$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

3.8 ଅଭେଦ (Identity) :

ଆସ ଆମେ ନିମ୍ନ ଗାଣିତିକ ଉକ୍ତିକୁ ପରୀକ୍ଷା କରିବା ।

$(a + 1)(a + 2) = a^2 + 3a + 2$... (1)

$a = 10$ ପାଇଁ

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (a+1)(a+2) = (10+1)(10+2) = 11 \times 12 = 132$

ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ $= a^2 + 3a + 2 = 10^2 + 3 \times 10 + 2$

$= 100 + 30 + 2 = 132$

$\therefore a = 10$ ପାଇଁ (1) ଉକ୍ତିର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ସେହିପରି $a = -5$ ନେଲେ

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (a + 1)(a + 2) = (-5+1)(-5 + 2) = (-4) \times (-3) = 12$

ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ $= a^2 + 3a + 2 = (-5)^2 + 3 \times (-5) + 2 = 25 - 15 + 2 = 12$

ଏଠାରେ ମଧ୍ୟ $a = -5$ ପାଇଁ (1) ଉକ୍ତିର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

a ର ଆଉ କେତେକ ମୂଲ୍ୟ ନେଇ ଦେଖ । ଦେଖିବ a ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ, (1) ଉକ୍ତିର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ ହେବ ।

ମନେରଖ : **ଯେଉଁ ଉକ୍ତିଟି ଏଥିରେ ଥିବା ବୀଜଗାଣିତିକ ସଂକେତମାନଙ୍କର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଇଁ ସତ୍ୟ ହୁଏ, ତାହାକୁ ଅଭେଦ କୁହାଯାଏ ।**

ଅତଏବ $(a+1)(a+2) = a^2 + 3a + 2$ ଏକ ଅଭେଦ ଅଟେ ।

ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଅନ୍ୟ ଏକ ଉକ୍ତିକୁ ନିଆଯାଉ । ଉକ୍ତିଟି ହେଲା : $a^2 + 3a + 2 = 132$ ... (2)

ଏହା $a = 10$ ପାଇଁ ସତ୍ୟ ଅଟେ । (ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

ମାତ୍ର $a = -5$ କିମ୍ବା $a = 2$ ଇତ୍ୟାଦି ପାଇଁ ସତ୍ୟ ନୁହେଁ । ତେଣୁ (2) ଉକ୍ତିଟି ଅଭେଦ ନୁହେଁ । **ଉକ୍ତିଟି ବୀଜଗାଣିତିକ ସଂକେତର କେବଳ କେତେକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମାନ ପାଇଁ ସତ୍ୟ ହେଉଥିଲେ ସେହି ଉକ୍ତିଟିକୁ ଆମେ, ଅଭେଦ ନ କହି ସମୀକରଣ କହିବା** । ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅଧ୍ୟାୟରେ ସମୀକରଣ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ ।

3.9 କେତେକ ଉପଯୋଗୀ ଅଭେଦ :

(a) ଦୁଇଟି ଦ୍ୱିପଦୀ ପରିପ୍ରକାଶ (Binomial) ର ଗୁଣଫଳରୁ ସୃଷ୍ଟ ନିମ୍ନ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକ ବୀଜଗଣିତର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପଯୋଗୀ ଅଭେଦ ।

(i) $\mathbf{(a+b)^2 = (a+b)(a+b)}$ (ସଂଜ୍ଞା)

$= a(a+b) + b(a+b)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 + ab + ba + b^2$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 + ab + ab + b^2$ ($\because ab = ba$) (ଗୁଣନର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= a^2 + 2ab + b^2$ $\therefore (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ... (I)

(ii) $\mathbf{(a-b)^2 = (a-b)(a-b)}$ (ସଂଜ୍ଞା)

$= a(a-b) - b(a-b)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 - ab - ba + b^2$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 - ab - ab + b^2$ ($\because ab = ba$) (ଗୁଣନର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= a^2 - 2ab + b^2$ $\therefore (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .....(II)

(iii) $\mathbf{(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b)}$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 - ab + ba - b^2$

$= a^2 - ab + ab - b^2$ ($\because ab = ba$)(ଗୁଣନର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= a^2 - b^2$

$\therefore (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$........ (III)

(iv) $\mathbf{(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)}$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= x^2 + xb + ax + ab$ (ପୁନଃ ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= x^2 + bx + ax + ab$ (ଗୁଣନର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= x^2 + ax + bx + ab$ (ଯୋଗର କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ)

$= x^2 + (a + b)\,x + ab$

$\therefore (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab$........ (IV)

ଟୀକା : 1. ଅଭେଦ (IV)ରେ $b = -b$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)\,x - ab$

2. ଅଭେଦ (IV)ରେ $a = -a$ ଏବଂ $b = -b$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)\,x + ab$

3. ଅଭେଦ (IV)ରେ $a = -a$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(x-a)(x+b) = x^2 - (a-b)\,x - ab$

ନିଜେ କର

1. ଅଭେଦ (I) ରେ b ସ୍ଥାନରେ –b ନେଇ ଦେଖ; ଅଭେଦ (II) ମିଳୁଛି କି ?
2. $a = 2, b = 3, x = 5$ ନେଇ, ଅଭେଦ (IV) ର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।
3. ଅଭେଦ (IV) ରେ $a = b$ ନେଲେ ତୁମକୁ କ'ଣ ମିଳିବ ?

   ଏହାର କ'ଣ ଅଭେଦ (I) ସହିତ କିଛି ସମ୍ବନ୍ଧ ଅଛି ?
4. ଅଭେଦ (IV) ରେ $a = -c$ ଏବଂ $b = -c$ ନେଲେ କ'ଣ ମିଳିବ ? ଏହାର ଅଭେଦ (II) ସହିତ କ'ଣ ସମ୍ବନ୍ଧ ଅଛି ?
5. ଅଭେଦ (IV) ରେ $b = -a$ ନେଲେ ତୁମେ କ'ଣ ପାଇବ ? ଏହାର ଅଭେଦ (III) ସହିତ କ'ଣ ସମ୍ବନ୍ଧ ଅଛି ?

ଉଦାହରଣ-1: ଅଭେଦ (I) ବ୍ୟବହାର କରି (i) $(2x + 3y)^2$ (ii) $(103)^2$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (i) $(2x + 3y)^2$

$= (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$ (ଅଭେଦ (I) ବ୍ୟବହାର କରି)

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

(ii) $(103)^2$

$= (100 + 3)^2$

$= (100)^2 + 2 \times 100 \times 3 + 3^2$ (ଅଭେଦ (I) ବ୍ୟବହାର କରି)

$= 10000 + 600 + 9 = 10609$

ଉଦାହରଣ-2: ଅଭେଦ (II) ବ୍ୟବହାର କରି(i) $(4p - 3q)^2$ (ii) $(4.9)^2$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (i) $(4p - 3q)^2$

$= (4p)^2 - 2(4p)(3q) + (3q)^2 = 16p^2 - 24pq + 9q^2$

(ii) $(4.9)^2$

$= (5.0 - 0.1)^2 = (5.0)^2 - 2(5.0)(0.1) + (0.1)^2$

$= 25.00 - 1.00 + 0.01 = 24.01$

ଉଦାହରଣ-3: ଅଭେଦ (III) ବ୍ୟବହାର କରି

(i) $(3m + 2n)(3m - 2n)$ (ii) $983^2 - 17^2$ (iii) 194×209 ର ସରଳୀକୃତ ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ :

(i) $(3m + 2n)(3m - 2n) = (3m)^2 - (2n)^2 = 9m^2 - 4n^2$

(ii) $983^2 - 17^2 = (983 + 17)(983 - 17) = 1000 \times 966 = 966000$

[$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ଅଭେଦରେ $a = 983$ ଏବଂ $b = 17$ ନେଇ]

(iii) $194 \times 206 = (200 - 6) \times (200 + 6) = 200^2 - 6^2 = 40000 - 36 = 39964$

ଉଦାହରଣ-4: ଅଭେଦ (IV) ପ୍ରୟୋଗରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(P + 5)(P + 3)$; (ii) $(a + 2)(a - 4)$; (iii) $(x - 7)(x - 6)$

ସମାଧାନ :- (i) $(P + 5)(P + 3)$

$= P^2 + (5 + 3)P + 5 \times 3 = P^2 + 8P + 15$

(ii) $(a + 2)(a - 4)$

$= a^2 + \{2 + (-4)\}a + 2(-4) = a^2 - 2a - 8$

(iii) $(x - 7)(x - 6)$

$= x^2 + \{(-7) + (-6)\}x + (-7)(-6) = x^2 - 13x + 42$

ଉଦାହରଣ-5: ଅଭେଦ (IV) ପ୍ରୟୋଗରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 501×502 (ii) 95×103

ସମାଧାନ :

(i) $501 \times 502 = (500 + 1) \times (500 + 2)$

$= 500^2 + (1 + 2) \times 500 + 1 \times 2$

$= 250000 + 1500 + 2 = 251502$

(ii) $95 \times 103 = (100 - 5) \times (100 + 3)$

$= 100^2 + (-5 + 3) \times 100 + (-5) \times 3$

$= 10000 - 200 - 15 = 9785$

(b) ଦୁଇଟି ତ୍ରିପଦୀ ପରିପ୍ରକାଶ (ପଲିନୋମିଆଲ୍)ର ଗୁଣଫଳରୁ ସୃଷ୍ଟ ଅନ୍ୟ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଭେଦ ସଂପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

$(a + b + c)^2 = (a + b + c)\ (a + b + c)$ (ସଂଜ୍ଞା)

$= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 + ab + ac + ba + b^2 + bc + ca + cb + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + ab + ba + ac + ca + bc + cb$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ ($\because$ $ab = ba$, $bc = cb$ ଏବଂ $ca = ac$)

$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ .... (V)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଅଭେଦ (I)ର ପ୍ରୟୋଗରେ ପାଇବା

$(a + b + c)^2 = \{(a + b) + c)\}^2 = (a + b)^2 + 2\ (a + b)c + c^2$ (ଅଭେଦ (I)ର ପ୍ରୟୋଗ)

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ca + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ .... (V)

ଟୀକା : 1. ଅଭେଦ (V) ରେ $c = -c$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$

2. ଅଭେଦ (V) ରେ $b = -b$ ନେଲେ ପାଇବା,

$(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

3. ଅଭେଦ (V) ରେ b = –b ଏବଂ c = –c ନେଲେ ପାଇବା,

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$$

ଉଦାହରଣ-6 : ନିମ୍ନସ୍ଥ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ ସ୍ଥିର କରିବା ।

(i) $a + 2b + c$ (ii) $x + 2y - 3z$

ସମାଧାନ : (i) $(a + 2b + c)^2 = a^2 + (2b)^2 + c^2 + 2.a.2b + 2.\ 2b.c + 2.c.a$

$$= a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab + 4bc + 2ca$$

(ii) $(x + 2y - 3z)^2 = x^2 + (2y)^2 + (-3z)^2 + 2.x.2y + 2.2y.(-3z) + 2(-3z).x$

$$= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 12yz - 6zx$$

ଉଦାହରଣ-7 : ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ରାଶିରେ ପରିଣତ କର ।

(i) $a^2 + 8ab + 16b^2$ (ii) $4x^2 - 4x + 1$

(iii) $9x^2 - 12xy + 4y^2$ (iv) $x^2 + 6xy + 9y^2$

(v) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 24\ yz + 16\ xz$

(vi) $m^2 + 4n^2 + 25z^2 - 4mn - 20nz + 10\ mz$

ସମାଧାନ :

(i) $a^2 + 8ab + 16b^2 = (a)^2 + 2.\ a.\ 4b + (4b)^2 = (a + 4b)^2$ ଅଭେଦ -(I)

(ii) $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2.2x.1 + (1)^2 = (2x - 1)^2$ ଅଭେଦ -(II)

(iii) $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x)^2 - 2.3x.2y + (2y)^2 = (3x - 2y)^2$ ଅଭେଦ -(II)

(iv) $x^2 + 6xy + 9y^2 = (x)^2 + 2.x.3y + (3y)^2 = (x + 3y)^2$ ଅଭେଦ -(I)

(v) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 24\ yz + 16\ xz$

$= (2x)^2 + (3y)^2 + (4z)^2 + 2.2x.3y + 2.3y.4z + 2.4z.2x$

$= (2x + 3y + 4z)^2$ ଅଭେଦ -(V)

(vi) $m^2 + 4n^2 + 25z^2 - 4mn - 20nz + 10\ mz$

$= (m)^2 + (2n)^2 + (5z)^2 - 2.m.2n - 2.2n.5z + 2.5zm$

$= (m - 2n + 5z)^2$ ଅଭେଦ -(V), ଟୀକା-(2)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

$m^2 + 4n^2 + 25z^2 - 4mn - 20nz + 10\ mz$

$= (m)^2 + (-2n)^2 + (5z)^2 + 2.m\ (-2n) + 2.(-2n)\ 5z + 2.5z.m$

$= (m - 2n + 5z)^2$ ଅଭେଦ -(V)

ଅନୁଶୀଳନୀ -3(f)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $(a + 2)^2 = a^2 + (\text{—})\ a + 2^2$ (2, 2a, 4, 4a)

(ii) $(3 + y)^2 = 9 + 3\ (\text{—}) + y^2$ (y, 2y, 3y, 4y)

(iii) $(4 - y)^2 = 16 + 2\ (\text{—}) + y^2$ (–2, –2y, –4, –4y)

(iv) $(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 3\ (\text{—}) + 9y^2$ (2xy, 3xy, 4xy, 12xy)

(v) $(x + a)\ (x - b) = x^2 + (\text{—})\ x - ab$ (a+b, a–b, b–a, –(a+b))

2. ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ରାଶିର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $b + c$ (ii) $(4 + b)$ (iii) $r - 10$ (iv) $3n + 2$

(v) $2m + n$ (vi) $7p - q$ (vii) $2x + 3y$ (viii) $2m - 3n - P$

(ix) $x - y + 4z$ (x) $a + 2b + 3c$

3. ଆବଶ୍ୟକ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନସ୍ଥ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 102 (ii) 304 (iii)1003 (iv) 4001

4. ଆବଶ୍ୟକ ଅଭେଦ ପ୍ରୟୋଗ କରି ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(i) 99^2 (ii) 998^2 (iii) 297×303 (iv) 78×82

(v) 8.9^2 (vi) 1.05×9.5 (vii) $51^2 - 49^2$ (viii) $(1.02)^2 - (0.98)^2$

(ix) $153^2 - 147^2$

5. $(x + a)\ (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ଅଭେଦ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 103×104 (ii) 5.1×5.2 (iii) 103×98 (iv) 9.7×9.8

6. ଆବଶ୍ୟକ ଅଭେଦ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(x + 3)(x + 3)$ (ii) $(2y + 5)(2y + 5)$

(iii) $2a - 7(2a - z)$ (iv) $(1.1m - 0.4)(1.1m + 0.4)$

(v) $(a^2 + b^2)(-a^2 + b^2)$ (vi) $(6x - 7)(6x + 7)$

(vii) $(P - 5)(P + 5)$ (viii) $(2x + 3y)(3y - 2x)$

(ix) $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$ (x) $(2y + 3)(2y - 3)(4y^2 + 9)$

7. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ଅଭେଦ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(x + 3)(x + 7)$ (ii) $(4x + 5)(4x + 1)$

(iii) $(4x - 5)(4x - 1)$ (iv) $(4x + 5)(4x - 1)$

(v) $(2a^2 + 9)(2a^2 + 5)$ (vi) $(xyz - 4)(xyz - 2)$

8. ସରଳ କର ।

(i) $(a^2 - b^2)^2 + (a^2 + b^2)^2$ (ii) $(2x + 5)^2 - (2x - 5)^2$

(iii) $(7m - 8n)^2 + (7m + 8n)^2$ (iv) $(4m + 5n)^2 + (5m + 4n)^2$

(v) $(2.5p - 1.5q)^2 - (1.5p - 2.5q)^2$ (vi) $(ab + bc)^2 - 2ab^2c$

(vii) $(m^2 - n^2m)^2 + 2m^2n^2$ (viii) $(a+b-c)^2 + (a-b-c)^2$

(ix) $(2a-3b-c)^2+(2a-b+5c)^2$ (x) $(3x-4y+z)^2-(x-2y-z)^2$

9. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କର ।

(i) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ (ii) $64m^2 - 48mn + 9n^2$

(iii) $4x^2 - 4x + 1$ (iv) $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 4yz + 2zx$

(v) $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2yz - 4xz$ (vi) $9x^2 + 4y^2 + z^2 - 12xy - 4yz + 6zx$

10. (i) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ (ii) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

(iii) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$ (iv) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(2a+b)^2 = (2a-b)^2 = 8ab$

(v) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(3x-2y)^2 + 12xy = 9x^2+4y^2$

ସୂଚନା : ଅଭେଦ (I) ଓ ଅଭେଦ (II) ପ୍ରୟୋଗରେ ଉପରୋକ୍ତ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକୁ ପାଇବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

*****

ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ (FACTORISATION)

ଅଧ୍ୟାୟ
4

ME58LR

4.1. ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ଗଣନସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦକ (Factors) ବା ଗୁଣନୀୟକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଶିଖିଛ ଏବଂ ଏହାର ବ୍ୟବହାରରେ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଗରିଷ୍ଠ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ (ଗ.ସା.ଗୁ.) ଏବଂ ଲଘିଷ୍ଠ ସାଧାରଣ ଗୁଣିତକ (ଲ.ସା.ଗୁ.) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କିପରି କରାଯାଏ ସେ ବିଷୟରେ ମଧ୍ୟ ଜାଣିଛ । **ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ବା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାକୁ କେତେକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣନୀୟକ ଭାବେ ପରିଣତ କରିବାର ପ୍ରଣାଳୀକୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।** ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, 30 କୁ ଅନ୍ୟ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କଲେ ପାଇବା –

$30 = 1 \times 30 = 2 \times 15 = 3 \times 10 = 5 \times 6 = 2 \times 3 \times 5$

ତେଣୁ 30 ର ଗୁଣନୀୟକ ବା ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ 1,2, 3, 5, 6, 10, 15 ଓ 30 । ଏହି ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ 2,3 ଏବଂ 5 ହେଉଛନ୍ତି ମୌଳିକ ଉତ୍ପାଦକ । ଅତଏବ 30 କୁ ମୌଳିକ ଗୁଣନୀୟକ ବା ଉତ୍ପାଦକରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ ପାଇବା $30 = 2 \times 3 \times 5$

ଏଠାରେ ମନେରଖିବାକୁ ହେବ ଯେ **କୌଣସି ଯୌଗିକ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଅନନ୍ୟ ଭାବେ କେତେକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣନୀୟକ ଭାବେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଥାଏ ।** ଯେପରି $30 = 2 \times 3 \times 5$, $42 = 2 \times 3 \times 7$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଦୁଇ ବା ଅଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ରାଶିମାନଙ୍କର ବା ପରିପ୍ରକାଶମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ ବା ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ନିମିତ୍ତ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରଣାଳୀ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

4.2. ଉତ୍ପାଦକ (Factors) ଏବଂ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ (Factorisation) :

ଦୁଇ ବା ଅଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ରାଶିମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣର ଆଲୋଚନା ପୂର୍ବରୁ ଆମେ ପ୍ରଥମେ ଗୋଟିଏ ପଦରେ ଥିବା ବିଭିନ୍ନ ଉତ୍ପାଦକ ବା ଗୁଣନୀୟକ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ଲକ୍ଷ୍ୟ କର $2a^2bc$ ଗୋଟିଏ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ବୀଜଗାଣିତିକ ରାଶି । ଏଠାରେ $2a^2bc = 2 \times a \times a \times b \times c$

ଉକ୍ତ ରାଶି $2a^2bc$ ର 2, a, a, b ଏବଂ c ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ ବା ଗୁଣନୀୟକ ।

ସେହିପରି $5xy = 5 \times x \times y$ ହେତୁ 5, x, y ପ୍ରତ୍ୟେକେ 5xy ରାଶିର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଗୁଣନୀୟକ ।

କୌଣସି ବୀଜଗାଣିତିକ ରାଶି, କେତେକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଅନ୍ୟ କେତେକ ବୀଜଗାଣିତିକ ରାଶିମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ସହ ସମାନ ହେଲେ ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଉକ୍ତ ରାଶିମାନଙ୍କୁ ଦତ୍ତ ରାଶିର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ କୁହାଯାଏ ।

ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଏକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଯେଉଁଥିରେ ଆମେ ଦତ୍ତ ବୀଜଗାଣିତିକ ରାଶିକୁ କେବଳ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ବା ମୌଳିକ ଉତ୍ପାଦକ (ଯାହାକୁ ଅନ୍ୟ ଉତ୍ପାଦକର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରିହେବ ନାହିଁ) ମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା ।

4.2.1 ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ :

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ବଣ୍ଟନ ନିୟମଟି ହେଲା $\mathbf{x(a+b) = xa + xb}$ ।

ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ ଲେଖିଲେ $\mathbf{xa + xb = x(a + b)}$

ଏଠାରେ x(a+b) ପରିପ୍ରକାଶର x ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ଓ a+b ଅନ୍ୟ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ।

ବଣ୍ଟନ ନିୟମଟି ଦୁଇରୁ ଅଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ରାଶି ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଯଥା : $xa + xb + xc = x(a + b + c)$

ମନେରଖ :
(i) ପଦମାନଙ୍କର କୌଣସି ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ନ ଥିଲେ ଏ ପ୍ରଣାଳୀ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହେବ ନାହିଁ ।
(ii) ଦ୍ୱିପଦ, ତ୍ରିପଦ ବା ବହୁପଦବିଶିଷ୍ଟ ରାଶି ମଧ୍ୟ ଗୁଣନୀୟକ ହୋଇପାରେ ।
(iii) ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ, ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ବା ବୀଜଗାଣିତିକ ସଂକେତ ଯଥା : a, b, c, x, y, z ପ୍ରଭୃତି ହୋଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ –1 : $2x + 4$ କୁ ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

ସମାଧାନ : $2x + 4 = 2(x + 2)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

ଉଦାହରଣ –2 : $12a^2b + 15ab^2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

ସମାଧାନ : $12a^2b + 15ab^2 = 3ab(4a + 5b)$

ଏଠାରେ 3ab ଏବଂ 4a + 5b ର ଗୁଣଫଳ $12a^2b + 15ab^2$ ସହ ସମାନ । ଅତଏବ 3, a, b ଏବଂ (4a+5b) ପ୍ରତ୍ୟେକେ $12a^2b+15ab^2$ ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଗୁଣନୀୟକ ବା ଉତ୍ପାଦକ ।

ଉଦାହରଣ –3 : $a^2bc + ab^2c + abc^2$ କୁ ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

ସମାଧାନ : $a^2bc + ab^2c + abc^2 = a \times b \times c(a + b + c) = abc(a + b + c)$

ଏଠାରେ a, b, c ଏବଂ (a + b + c), $a^2bc + ab^2c + abc^2$ ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ ଅଟନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ –4 : $14x^4 - 18x^3 + 10x^2$ କୁ ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

ସମାଧାନ : $14x^4 - 18x^3 + 10x^2 = 2x^2 (7x^2 - 9x + 5)$

ଉଦାହରଣ –5 : ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

(i) $2x (a - b) + 3y (a - b)$ (ii) $2a (x - y) + 5b (y - x)$

ସମାଧାନ : (i) $2x (a - b) + 3y (a - b)$

$= (a - b) (2x + 3y)$ [ଲକ୍ଷ୍ୟ କର: ଏଠାରେ ପଦଦୁଇଟିର ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ $(a - b)$]

(ii) $2a (x - y) + 5b (y - x) = 2a(x - y) + 5b \{-(x-y)\}$

$= 2a (x-y) - 5b (x-y) = (x - y) (2a - 5b)$

[ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : $(y - x) = -x+y = -(x-y)$]

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (a)

ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

1. $12x + 36$

2. $8a + 4b$

3. $22y - 33z$

4. $14pq + 35pqr$

5. $10a^2b + 5a$

6. $15a^2bc - 10ab^2c$

7. $8a^3 + 4a^2 + 2a$

8. $30a^3b^3c^3 + 25 a^5b^3c^6 - 15a^6b^6c^6$

9. $7(2x + 5) + 3 (2x + 5)$

10. $5a (2x + 3y) - 2b (2x + 3y)$

11. $8(5x + 9y)^2 + 12 (5x + 9y)$

12. $9a (6a - 5b) - 12a^2 (6a - 5b)$

13. $5 (x - 2y)^2 + 3 (x - 2y)$

14. $6(a + 2b) - 4(a + 2b)^2$

15. $a(a - 1) + b (a - 1)$

16. $(x - y)^2 + (x - y)$

17. $a (x - y) + 2b (y - x) + c (x - y)$

18. $a (b - c) + b (b - c) + c (b - c)$

19. $x^3 (a - 2b) + x^2 (a - 2b)$

20. $4 (x +y) (3a - b) + 6(x + y) (2b - 3a)$

21. $(2x - 3y) (a + b) + (3x - 2y) (a + b)$

22. $a^2 (x + y) + b^2 (x + y) + x^2 (x + y)$

4.2.2 ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରି ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

(Factorisation by grouping method) :

ଚାରି ବା ଅଧିକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ପରିପ୍ରକାଶମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ ଉକ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ହୋଇପାରିବ । ଏଠାରେ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶକୁ ଏପରି ଦୁଇ ବା ତତୋଧିକ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରାଯିବ ଯେପରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗରୁ ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ମିଳିବ । ଦରକାର ପଡ଼ିଲେ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ପୁନଃସଜ୍ଜୀକରଣ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।

ଉଦାହରଣ –6 : ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର :

(i) $ax + by + bx + ay$ (ii) $3m - 6n - am + 2an$

ସମାଧାନ :

ପରିପ୍ରକାଶଟିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଦେଖାଯିବ ଯେ ଏହାର ସାଧାରଣ ଉତ୍ପାଦକ ନାହିଁ । କିନ୍ତୁ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ ସଜାଇ ଦେଲେ ପରିପ୍ରକାଶଟିର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ସହଜ ହେବ ।

(i) $ax + by + bx + ay = ax + bx + ay + by$

(ଏଠାରେ 'x' ଥିବା ପଦ ଓ 'y' ଥିବା ପଦକୁ ଏକତ୍ର ରଖାଗଲା ।)

$= x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ : ପଦ ଚାରୋଟି ମଧ୍ୟରୁ 'a' ପଦଥିବା ଏବଂ 'b' ପଦ ଥିବା ପଦମାନଙ୍କୁ ଏକତ୍ର ଲେଖି ମଧ୍ୟ ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ । $ax + by + bx + ay = ax + ay + bx + by = a(x+y) + b(x+y) = (x+y)(a+b)$

(ii) $3m - 6n - am + 2an = 3(m - 2n) - a(m - 2n) = (m - 2n)(3 - a)$

(ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ଓ ତୃତୀୟ ପଦଦ୍ୱୟକୁ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ଚତୁର୍ଥ ପଦଦ୍ୱୟକୁ ଦୁଇଟି ଅଲଗା ଅଲଗା ଭାଗରେ ପରିଣତ କରି ଉତ୍ପାଦକ ନିରୂପଣ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।)

ଉଦାହରଣ –7 : ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $2xy + 3 + 2y + 3x$ (ii) $6xy - 4y + 6 - 9x$

ସମାଧାନ :

(i) $2xy + 3 + 2y + 3x = 2xy + 2y + 3x + 3$

$= 2y(x + 1) + 3(x + 1) = (x + 1)(2y + 3)$

(ii) $6xy - 4y + 6 - 9x = 6xy - 9x - 4y + 6$

$= 3x(2y - 3) - 2(2y - 3)$

$= (2y - 3)(3x - 2) = (3x - 2)(2y - 3)$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (b)

ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

1. $x^2 + xy + 8x + 8y$
2. $pq + pr + q^2 + qr$
3. $ab + db + ac + dc$
4. $pq + qr + pr + r^2$
5. $15xy - 6x + 5y - 2$
6. $ax + bx - ay - by$
7. $15pq + 15 + 9q + 25p$
8. $2a + 6b - 3(a + 3b)^2$
9. $a^2 + 2a + ab + 2b$
10. $x^2 - xz + xy - yz$
11. $a^2 + bc - ba - ac$
12. $2p^2 - pq - 2pr + qr$
13. $x^2 - 3x + 2x - 6$
14. $2x^2 - 5x + 4x - 10$
15. $x^2 - y^2 + x - xy^2$
16. $lm^2 - mn^2 - lm + n^2$
17. $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 6y^3$
18. $6ab - b^2 + 12ac - 2bc$
19. $x^2 - 11xy - x + 11y$
20. $3ax - 6ay - 8by + 4bx$

4.3 ଦ୍ୱିଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଦ୍ୱିଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ସ୍ୱରୂପ ହେଉଛି $x^2 + px + q$ । ଏହାର ମଧ୍ୟମ ପଦ px, ଯେଉଁଥିରେ 'x' ଚଳରାଶି ଓ 'p' ସହଗ । ଏଠାରେ p ଓ q ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧ୍ରୁବକ ।

ତୁମେ ଜାଣିଛ $\mathbf{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$

ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ ଲେଖିଲେ $\mathbf{x^2 + (a + b)x + ab = (x+a)(x+b)}$ (ପୂର୍ବ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆଲୋଚିତ ଅଭେଦ)

ତେଣୁ ଯଦି ପରିପ୍ରକାଶଟି $x^2 + px + q$ ରୂପରେ ଥାଏ ଆମେ p କୁ a+b ରୂପେ ଭାଙ୍ଗିବା ଯେପରି କି q = ab ହେବ । ଏଠାରେ ପରିପ୍ରକାଶର ଉତ୍ପାଦକ ଗୁଡ଼ିକ (x + a) ଏବଂ (x + b) ହେବ । ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିବା ପାଇଁ ନିମ୍ନ ସୋପାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ଅବଲମ୍ବନ କରିବା ।

(i) ଦ୍ୱିଘାତ ପରିପ୍ରକାଶକୁ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ଘାତର ଅଧଃ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ରଖିବାକୁ ହେବ ।

(ii) ଏପରି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ, ଯାହାର ଯୋଗଫଳ ମଧ୍ୟମ ପଦର ସହଗ ସହ ସମାନ ଓ ଗୁଣଫଳ ତୃତୀୟ ପଦ ସହ ସମାନ ହେବ ।

(iii) ବର୍ତ୍ତମାନ ମଧ୍ୟମପଦଟିକୁ ଆମର ଆବଶ୍ୟକତା ଅନୁଯାୟୀ ଦୁଇଟି ପଦରେ ପ୍ରକାଶ କରି ପାରିବା ।

(iv) ବର୍ତ୍ତମାନ ଚାରିପଦ ବିଶିଷ୍ଟ ରାଶିକୁ ଉତ୍ପାଦକରେ ପୂର୍ବ ବର୍ଣ୍ଣିତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ – 8 : ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

(i) $x^2 + 9x + 20$ (ii) $y^2 - 7y + 12$ (iii) $x^2 - x - 30$

ସମାଧାନ : (i) $x^2 + 9x + 20$ କୁ $x^2 + px + q$ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ।

(ଏଠାରେ p = 9 ଓ q = 20 । ଏପରି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ବାଛିବା, ଯାହାର ଯୋଗଫଳ 9 ଓ ଗୁଣଫଳ 20 ହେବ । ଚିନ୍ତାକଲେ ଜାଣିପାରିବା ଯେ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି 4 ଓ 5 ହେବ । ଯେହେତୁ ଗୁଣଫଳ ଧନାତ୍ମକ ଏବଂ ଯୋଗ ବା ମିଶାଣଫଳ ମଧ୍ୟ ଧନାତ୍ମକ ।)

$\therefore x^2 + 9x + 20 = x^2 + (4 + 5)x + 4 \times 5$ ...(i)

$= x^2 + 4x + 5x + 20 = x(x + 4) + 5(x + 4) = (x + 4)(x + 5)$

ସୋପାନ (i) ରୁ ଆମେ ସିଧାସଳଖ ଉତ୍ପାଦକଦ୍ୱୟ (x + 4) ଓ (x + 5) କୁ ଲେଖିପାରିବା ।

(ii) $y^2 - 7y + 12$

ଏଠାରେ p = –7 ଓ q = 12 ହେତୁ ଆମେ ଏପରି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା, ଯାହାର ଯୋଗଫଳ –7 ଓ ଗୁଣଫଳ 12 ହେବ । ଏଠାରେ ଗୁଣଫଳ ଧନାତ୍ମକ ହେତୁ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ଋଣାତ୍ମକ ହେବେ ।∴ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ହେବ –4 ଓ –3 ।

$y^2 - 7y + 12 = y^2 + \{(-4)+(-3)\}y + (-4)(-3)$............. (ii)

$= y^2 - 4y - 3y + 12 = y(y - 4) - 3(y - 4) = (y - 4)(y - 3)$

ଆମେ ସୋପାନ (ii) ରୁ ସିଧାସଳଖ ଉତ୍ପାଦକଦ୍ୱୟକୁ ଅର୍ଥାତ୍ (y –4) ଏବଂ (y –3) କୁ ଲେଖିପାରିବା ।

(iii) $x^2 - x - 30$

ଏଠାରେ ଗୁଣଫଳ (– 30) ଏବଂ ଯୋଗଫଳ (–1) ହେତୁ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ – 6 ଏବଂ 5 ।

$$x^2 - x - 30 = x^2 + \{(-6) + 5\}x + (-6)5$$
$$= x^2 - 6x + 5x + (-6)5$$
$$= x(x-6) + 5(x-6) = (x-6)(x+5)$$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (c)

ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

1. (i) $a^2 + 8a + 15$ (ii) $x^2 + 5x + 6$ (iii) $x^2 + 7x + 6$

(iv) $x^2 + 8x + 12$ (v) $x^2 + 11x + 24$ (vi) $x^2 + 2x + 1$

2. (i) $p^2 - 10p + 24$ (ii) $x^2 - 8x + 12$ (iii) $x^2 - 7x + 10$

(iv) $x^2 - 9x + 14$ (v) $x^2 + 4x - 21$ (vi) $x^2 - 3x + 2$

3. (i) $a^2 - 4a - 5$ (ii) $x^2 - 11x - 42$ (iii) $x^2 - 4x - 21$

(iv) $x^2 - x - 90$ (v) $x^2 - 2x - 63$ (vi) $x^2 - x - 2$

4. (i) $(a+1)^2 + 16(a+1) + 60$

ସୂଚନା : $(a + 1)$ କୁ P ରୂପେ ନେଇ ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶକୁ ଲେଖିଲେ ରାଶିଟି ହେବ $P^2 + 16P + 60$ ।

ତପ୍ରରେ ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରାଯାଇପାରିବ ।

(ii) $(a+3)^2 - 14(a+3) + 45$ (iii) $(x-2)^2 + 2(x-2) - 8$

5. $(a+7)(a-10) + 16$ 6. $(x-2y)^2 - 5(x-2y) + 6$

4.4 ବିଭିନ୍ନ ଅଭେଦ ସାହାଯ୍ୟରେ ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ (Factorisation using different Identities) :

ପୂର୍ବ ଅଧ୍ୟାୟରେ କେତେକ ଅଭେଦର ଧାରଣା ତୁମେମାନେ ପାଇସାରିଛ । ସେଗୁଡ଼ିକୁ ମନେପକାଅ ।

ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣରେ ଆବଶ୍ୟକ ଅଭେଦାବଳୀ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

1. $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
2. $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
4. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2$
5. $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca = (a-b+c)^2$
6. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca = (a+b-c)^2$
7. $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca = (a-b-c)^2$

ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ଉପରୋକ୍ତ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ ।

ଉଦାହରଣ –9 : $x^2 + 6xy + 9y^2$ ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ ।

ସମାଧାନ :

$x^2 + 6xy + 9y^2 = (x)^2 + 2.\ x.\ 3y + (3y)^2$

$= (x+3y)^2 = (x + 3y)\ (x+3y)$ (ଅଭେଦ – 1)

ଉଦାହରଣ –10 : $4a^2 - 4ab + b^2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $4a^2 - 4ab + b^2 = (2a)^2 - 2.\ (2a)b + (b)^2 = (2a - b)^2$

$= (2a - b)\ (2a - b)$ (ଅଭେଦ – 2)

ଉଦାହରଣ –11 : $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy + 6xz + 4yz$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy + 6xz + 4yz$

$= (3x)^2 + (2y)^2 + (z)^2 + 2(3x)(2y) + 2(3x)(z) + 2(2y)z$

$=(3 + 2y + z)^2$

$=(3x + 2y + z)(3x + 2y + z)$ (ଅଭେଦ – 4)

ଉଦାହରଣ –12 : $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 4xz - 12xy + 6yz$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 4xz - 12xy + 6yz$

$=(2x)^2 + (3y)^2 + (z)^2 - 2(2x)z - 2(2x)(3y) + 2(3y)z$

$= (2x - 3y - z)^2$ (ଅଭେଦ – 7)

$=(2x - 3y - z)\ (2x - 3y - z)$

ଉଦାହରଣ –13 : $9x^2 - 16y^2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $9x^2 - 16y^2 = (3x)^2 - (4y)^2$

$= (3x + 4y)\ (3x - 4y)$ (ଅଭେଦ – 3)

ଉଦାହରଣ –14 : $a^2 + 2ab + b^2 - 4c^2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $a^2 + 2ab + b^2 - 4c^2 = (a+b)^2 - (2c)^2$ (ଅଭେଦ – 1)

$= (a + b + 2c)\ (a + b - 2c)$ (ଅଭେଦ – 3)

ଉଦାହରଣ –15 : ଦୁଇଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗର ଅନ୍ତର ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରି ଉତ୍ପାଦକ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $x^2 - 2x - 323$ (ii) $x^2 + 6x - 4087$

ସମାଧାନ : (i) $x^2 - 2x - 323$

$= (x)^2 - 2.\ x\ .\ 1 + (1)^2 - (1)^2 - 323$

$= (x - 1)^2 - 324 = (x - 1)^2 - (18)^2$ (ଅଭେଦ – 2)

$= (x - 1 + 18)\ (x - 1 - 18)$ (ଅଭେଦ – 3)

$= (x + 17)\ (x - 19)$

(ii) $x^2 + 6x - 4087$

$= x^2 + 2x.3 + (3)^2 - (3)^2 - 4087$

$= (x+3)^2 - 4096 = (x+3)^2 - (64)^2$ (ଅଭେଦ – 1)

$= (x + 3 + 64)(x + 3 - 64) = (x + 67)(x - 61)$ (ଅଭେଦ – 3)

ଉଦାହରଣ –16 : $a^4 + 4b^4$ ର ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

ସମାଧାନ : $a^4 + 4b^4 = (a^2)^2 + (2b^2)^2 = (a)^2 + (2b^2)^2 + 2 . a^2 . 2b^2 - 2 . a^2 . 2b^2$

$= (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2$ (ଅଭେଦ – 1)

$= (a^2+2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$ (ଅଭେଦ – 3)

$= (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$

ଅନୁଶୀଳନୀ – 4(d)

ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । (1 ରୁ 7 ନମ୍ବର ପ୍ରଶ୍ନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ)

1. (i) $4x^2 + 4x + 1$ (ii) $9b^2 + 12bc + 4c^2$ (iii) $16a^2 + 40ab + 25b^2$
(iv) $49x^2 + 112xy + 64y^2$ (v) $a^4 + 6a^2b^2 + 9b^4$

2. (i) $9x^2 - 6x + 1$ (ii) $16x^2 - 40xy + 25y^2$ (iii) $49a^2 - 126ab + 81b^2$
(iv) $64a^2 - 16a + 1$ (v) $100a^4 - 20a^2b + b^2$

3. (i) $16x^2 + 9y^2 + 25z^2 + 24xy + 40xz + 30yz$
(ii) $49x^2 + 25y^2 + z^2 + 70xy + 10zy + 14xy$
(iii) $4a^2 + 9b^2 + c^2 + 12ab + 4ac - 6bc$
(iv) $100a^2 + 81b^2 + 49c^2 - 180ab - 140ac + 126bc$
(v) $x^4 + y^2 + z^2 - 2x^2y - 2x^2z + 2yz$

4. (i) $16a^2 - 9b^2$ (ii) $25a^2 - 36b^2$ (iii) $81a^2 - 100b^2$
(iv) $16a^2 - 49b^2$ (v) $144a^2 - 225b^2$ (vi) $256a^2 - 289b^2$
(vii) $400a^2 - 225b^2$ (viii) $441a^2 - 900b^2$ (ix) $121a^2 - 289b^2$
(x) $81a^2 - 361b^2$ (xi) $(a + b)^2 - c^2$ (xii) $(a)^2 - (b-c)^2$

5. (i) $a^4 + a^2 + 1$ (ii) $4x^4 + 1$ (iii) $x^4 + 36x^2y^2 + 1296y^4$
(iv) $x^4 + 9x^2y^2 + 81y^4$ (v) $x^4 + 16x^2 + 256$

6. (i) $a^2 + 6a + 9 - b^2$ (ii) $a^2 - 4a + 4 - c^2$ (iii) $4a^2 - 4a + 1 - 9b^2$
(iv) $a^2 - 6ab + 9b^2 - 16c^2$ (v) $16a^2 - 24ab + 9b^2 - 25c^2$

7. ଦୁଇଟି ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗର ଅନ୍ତର ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରି ସମାଧାନ କର ।
(i) $x^2 - 2x - 195$ (ii) $x^2 + 4x - 357$ (iii) $x^2 + 6x - 112$
(iv) $x^2 + 2x - 899$ (v) $x^2 - 4x - 621$ (vi) $x^2 - 10x - 171$
(vii) $x^2 - 6x - 891$ (viii) $x^2 + 4x - 192$

*****

ସୂଚକ ତତ୍ତ୍ୱ (THEORY OF INDICES)

ଅଧ୍ୟାୟ 5

MEE4NE

5.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ଆମେମାନେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଥବା ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଆଧାର ଏବଂ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଘାତବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶି ସଂପର୍କରେ ପଢ଼ିଅଛେ । ଏତଦ୍ ବ୍ୟତୀତ ଉପରୋକ୍ତ ଘାତ ରାଶି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ନିୟମଗୁଡ଼ିକୁ ଭଲ ଭାବରେ ଜାଣିପାରିଛେ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ଏବଂ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ସହ ଏଥି ସଂପର୍କିତ ନିୟମଗୁଡ଼ିକୁ ମଧ୍ୟ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଆମେ ଜାଣିଛେ $5 \times 5 \times 5 = 5^3$ ଯେଉଁଠାରେ 5^3 ଏକ ଘାତରାଶି ଏବଂ 5 ଓ 3 ଯଥାକ୍ରମେ ଘାତରାଶିର ଆଧାର ଏବଂ ଘାତ । ସେହିପରି $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^4$ । ଏଠାରେ ମଧ୍ୟ $(-2)^4$ ଏକ ଘାତରାଶି ଏବଂ -2 ଓ 4 ଯଥାକ୍ରମେ ଘାତରାଶିର ଆଧାର ଓ ଘାତ ।

ତେଣୁ ମନେରଖିବା ଉଚିତ ଯେ,

$a \times a \times a \times$ ...... m ଥର $= a^m$ ଯେଉଁଠାରେ a ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଅଥବା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ m ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା । 'a^m' ଏକ ଘାତରାଶି ଏବଂ a ଓ m ଯଥାକ୍ରମେ ଘାତରାଶିର ଆଧାର ଓ ଘାତାଙ୍କ ।

5.2 ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା (ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା) ଘାତାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶି :

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ପୂର୍ବରୁ ଆମେ ପ୍ରଥମେ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା(ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା) ଘାତାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଘାତରାଶି (ଗଣନସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ)ର ମାନ ଥାଏ ।

ଯେପରି $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, $(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{243},$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{(-2)^4}{(3)^4} = \frac{16}{81}$$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ନିଜେ କର

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଘାତରାଶିରେ ପରିଣତ କର :

(a) 625 (b) –27 (c) 243 (d) 1000 (e) $\frac{4}{9}$

2. ନିମ୍ନ ଘାତ ରାଶିଗୁଡ଼ିକର ମାନ ସ୍ଥିର କର :

(a) 6^3 (b) $(-8)^3$ (c) $(12)^2$ (d) $(-11)^3$ (e) $\left(\frac{-1}{5}\right)^3$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (a)

1. ନିମ୍ନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକୁ x^n (ଘାତରାଶି) ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର :

(i) $2 \times 2 \times 2 \times 2$ (ii) $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

(iii) $\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)$ (iv) $\left(-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{7}\right)$

(v) $\frac{5}{3} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{3}$ (vi) $y \times y \times y \times y \times y$

(vii) $(-p)(-p)(-p)$ (viii) $(a-b)(a-b)(a-b)(a-b)$

(ix) $(a+b)(a+b)(a+b)$ (x) $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$

2. ନିମ୍ନ ଘାତରାଶିମାନଙ୍କର ଆଧାର ଓ ଘାତାଙ୍କ ଦର୍ଶାଇ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(1)^{15}$ (ii) $(-1)^{11}$ (iii) $(-1)^{18}$ (iv) $(9)^5$ (v) $(-2)^5$

(vi) $\left(\frac{1}{6}\right)^6$ (vii) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ (viii) $(5 \times 2)^4$ (ix) $(10)^7$ (x) $(-10)^5$

3. ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

ଆଧାର	2	–3			7	4	$-\frac{1}{2}$	
ଘାତାଙ୍କ	6	6	5	4			7	5
ମାନ			32	625	2401	1024		$\frac{-1}{243}$

4. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ :

(i) 10 ର ଚତୁର୍ଥ ଘାତ କେତେ ? (ii) 5ର କେଉଁ ଘାତ 625 ?

(iii) $\frac{1}{8}$, $\left(\frac{1}{2}\right)$ ର କେଉଁ ଘାତ ? (iv) କେଉଁ ଆଧାରର ତୃତୀୟ ଘାତ $\frac{-27}{8}$?

5. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ :

(i) $\frac{2}{3}$ ଆଧାରର ଷଷ୍ଠ ଘାତ, $\frac{4}{9}$ ଆଧାରର କେଉଁ ଘାତ ସହ ସମାନ ?

(ii) 5 ଆଧାରର ଚତୁର୍ଥ ଘାତ, କେଉଁ ଆଧାରର ଦ୍ୱିତୀୟ ଘାତ ସହ ସମାନ ?

(iii) 256 ଯେଉଁ ଆଧାରର ଚତୁର୍ଥ ଘାତ, ତାହାର ତୃତୀୟ ଘାତ କେତେ ?

5.3 ଘାତରାଶିମାନଙ୍କର ଗୁଣନ ଓ ଭାଗକ୍ରିୟା :

ତୁମେମାନେ ପଢ଼ିଥିବା ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ନିୟମ ସମୂହକୁ ଆସ ମନେ ପକାଇବା । ବିଶେଷତଃ ଗୁଣନ ଏବଂ ଭାଗ ସଂକ୍ରାନ୍ତୀୟ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ନିୟମ – 1: 'a' ଏକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ m ଓ n ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ଉଦାହରଣ – 1 : $2^3 \times 2^4$ କୁ ଏକ ଘାତରାଶିରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମାଧାନ : $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ .... ନିୟମ (1)

ଉଦାହରଣ – 2 : $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$ କୁ ଏକ ଘାତରାଶିରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମାଧାନ : $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ ନିୟମ (1)

ନିୟମ – 2: (i) **'a' ଏକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ m ଓ n ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (m > n) ହେଲେ** $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(ii) **'a' ଏକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ m ଓ n ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (n > m) ହେଲେ** $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$

ଉଦାହରଣ – 3 : $\left(\frac{4}{3}\right)^7 \div \left(\frac{4}{3}\right)^4$ କୁ ଏକଘାତ ରାଶିରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମାଧାନ : $\left(\frac{4}{3}\right)^7 \div \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^{7-4} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$ ନିୟମ 2 (i)

ଉଦାହରଣ – 4 : $\left(\frac{4}{3}\right)^2 \div \left(\frac{4}{3}\right)^5$ କୁ ଘାତ ରାଶିରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମାଧାନ : $\left(\frac{4}{3}\right)^2 \div \left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^{5-2}} = \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^3}$ ନିୟମ 2 (ii)

ନିୟମ–3: 'a' ଏକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ m ଓ n ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $(a^m)^n = a^{mn}$ **ହେବ ।**

ଉଦାହରଣ – 5 : $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}^2$ କୁ ଏକ ଘାତ ରାଶିରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମାଧାନ : $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^3\right\}^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3\times 2} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$

ନିୟମ – 4: a ଓ b ଦୁଇଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ 'm' ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ

$(a \times b)^m = a^m \times b^m$ ଏବଂ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ – **6 :** $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2$ କୁ ଏକ ଘାତ ରାଶିରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମାଧାନ : $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$

ଉଦାହରଣ – **7 :** $\left(\frac{5}{7}\right)^3 \div \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \left(\frac{5}{7} \div \frac{5}{7}\right)^2 = (1)^3 = 1$

ମନେରଖ :
(i) m ଏକ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $(-1)^m = 1$
(ii) m ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $(-1)^m = -1$

ଉଦାହରଣ – **8 :** $\frac{2^3 \times 3^4}{3 \times 2^5}$ କୁ ସରଳ କର ।

ସମାଧାନ : $\frac{2^3 \times 3^4}{3 \times 2^5} = \left(\frac{2^3}{2^5}\right) \times \left(\frac{3^4}{3}\right) = \frac{1}{2^{5-3}} \times 3^{4-1} = \frac{1}{2^2} \times 3^3 = \frac{27}{4}$

ଉଦାହରଣ – **9 :** $\dfrac{\left(\frac{-2}{3}\right)^4 \times \frac{216}{125}}{\left(\frac{6}{5}\right)^2 \times \frac{4}{9}}$ କୁ ସରଳ କର ।

ସମାଧାନ : $\dfrac{\left(\frac{-2}{3}\right)^4 \times \frac{216}{125}}{\left(\frac{6}{5}\right)^2 \times \frac{4}{9}} = \dfrac{\left(\frac{-2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{6}{5}\right)^3}{\left(\frac{6}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{3}\right)^2} = \left(\frac{-2}{3}\right)^{4-2} \times \left(\frac{6}{5}\right)^{3-2} = \left(\frac{-2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{6}{5}\right) = \frac{4}{9} \times \frac{6}{5} = \frac{8}{15}$

ନିଜେ କର ନିମ୍ନ ଘାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପରିପ୍ରକାଶ ଗୁଡ଼ିକୁ ସରଳ କର ।

(i) $\left(\frac{2}{9}\right)^5 \div \left(\frac{-2}{9}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{1}{25}\right)^4 \div 5^4$ (iii) $\frac{3^8 \times a^5}{27 \times a^2}$ $(a \neq 0)$ (iv) $(4^2 \times 4^3) \div 4^5$

(v) $\left(\frac{-2}{3}\right)^9 \div \left(\frac{2}{3}\right)^7$ (vi) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}^2 \div \left(\frac{1}{4}\right)^3$

ଅନୁଶୀଳନୀ – 5 (b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ରାଶିଗୁଡ଼ିକୁ ଏକ ଆଧାର ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶି ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $3^6 \times 3^4$ (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$ (iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$ (iv) $(4)^6 \times (-4)^3$

(v) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4$ (vi) $(-4)^6 \times (4)^3$ (vii) $(9)^3 \times (27)^4$ (viii) $(8)^3 \times (-4)^4$

(ix) $(7)^8 \times (-7)^5$ (x) $8^5 \div (4)^4$ (xi) $\{(5)^3\}^4$ (xii) $\{(-2)^3\}^4$

(xiii) $\frac{7^4}{3^4}$ (xiv) $3^9 \div 4^9$ (xv) $\left(\frac{a}{b}\right)^7 \div \left(\frac{b}{a}\right)^3$ (xvi) $\left(\frac{a}{b}\right)^4 \div \left(\frac{-b}{a}\right)^3$

2. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $3^4 \times 3^3 \div 3^5$ (ii) $(3^{11} \times 4^5) \div (4^4 \times 3^6)$

(iii) $(4^3 \times 4^2 \times 4) \div (2^4 \times 2^3 \times 2^2)$ (iv) $2^{11} \div 8^3 \times 4^2$, (v) $\left(\frac{3}{2}\right)^6 \div \left(\frac{2}{3}\right)^2$

3. ସରଳ କର ।

(i) $(2^2 \times 2)^3$ (ii) $(ab)^5 \times a^3 \times b^2$ (iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^7 \times a^6 \times b^5 \times \left(\frac{b}{a}\right)^6$

(iv) $3^9 \times 3^5 \div 9^7$ (v) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(\frac{2}{3}\right)^8 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$

4. ମୌଳିକ ଆଧାର ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶିରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $(64)^3$ (ii) $(9)^7$ (iii) $(125)^{m-1}$ (iv) $(-8)^{11}$

5. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ପାଇଁ (T) ଓ ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି ପାଇଁ (F) ଲେଖ ।

(i) $2^3 \times 3^5 = 6^8$ (ii) $3^5 \times 5^5 = 15^5$ (iii) $(4^3)^4 = (4)^7$

(iv) $(5^2)^3 = 5^6$ (v) $(3)^3 \times (3)^2 = 3^6$ (vi) $(a^3.b^5) = (ab)^{15}$

(vii) $(2^3 \times 3^3) = 6^3$ (viii) $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \div \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^4$ (ix) $(-3)^4 \times (3)^5 \times (-3)^2 = (-3)^{11}$

(x) $-3^4 \times 3^3 = -3^7$

6. କେଉଁ କ୍ଷେତ୍ରରେ n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ?

(i) $2^n = 32$ (ii) $5^n = 100$ (iii) $4^n = 512$ (iv) $4^n = 1024$

(v) $3^n = 729$ (vi) $5^n = 1250$ (vii) $7^n = 343$ (viii) $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{64}$

(ix) $\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{32}{15}$ (x) $(-2)^n = -512$

5.4 ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ରାଶି :

ଆମେ ଜାଣିଛେ a^3, 3 ସଂଖ୍ୟକ a ର ଗୁଣଫଳ, ସେହିପରି ଆମେ a^0 ଏବଂ a^{-2}କୁ କିପରି ବୁଝିବା ?

ଆମେ କ'ଣ କହି ପାରିବା –

a^0, 0 ସଂଖ୍ୟକ a ର ଗୁଣଫଳ ? ଅଥବା a^{-2}, –2 ସଂଖ୍ୟକ a ର ଗୁଣଫଳ ?

ଉପରିସ୍ଥ ଉକ୍ତିଦ୍ୱୟ ଅର୍ଥହୀନ ।

ତେଣୁ ଆମେ a^0 ଓ a^{-2} ଭଳି ଘାତରାଶିର ସଂଜ୍ଞା ନିମ୍ନ ମତେ ପ୍ରକରଣ କରିବା ।

ସଂଜ୍ଞା : $a^0 = 1, a \in Q, a \neq 0$ ଏବଂ

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \in Q, a \neq 0, n \in N$

ମନେରଖ : 0^0 ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ,

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -1 : $\mathbf{a^n \times a^{-n} = 1}$ $\mathbf{(a \neq 0, a \in Q, n \in N)}$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -2 : $\mathbf{1 \div a^{-n} = a^n}$ $\mathbf{(a \neq 0, a \in Q, n \in N)}$

ଉଦାହରଣ - 10 : ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $(3)^{-3}$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$

ସମାଧାନ : (i) $(3)^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ (ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \frac{1}{\frac{81}{256}} = \frac{256}{81}$

ଉଦାହରଣ - 11 : ରଣାତ୍ମକ ଘାତାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶିରେ ପ୍ରକାଶ କର :

(i) 2^3, (ii) 729, (iii) $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ (iv) $\frac{1}{343}$ (v) $\frac{243}{32}$

ସମାଧାନ : (i) $2^3 = \frac{1}{2^{-3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ (ii) $729 = 3^6 = \frac{1}{3^{-6}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$

(iii) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{\frac{3}{2}}\right)^{-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$ (iv) $\frac{1}{343} = \frac{1}{7^3} = 7^{-3}$

(v) $\frac{243}{32} = \frac{1}{\frac{32}{243}} = \left(\frac{32}{243}\right)^{-1} = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^5\right\}^{-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

ମନେରଖ: a ଓ b ଅଣଶୂନ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ m ଓ n ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ହେଲେ

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$, (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(m > n)$,

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$, (iv) $(ab)^m = a^m \times b^m$ ଏବଂ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ ହେବ ।

କେତେକ ବିଶେଷ ଘାତରାଶି :

ମନେରଖ : (i) $(1)^{-10} = \frac{1}{1^{10}} = \frac{1}{1} = 1$

(ii) $(-1)^{-8} = \frac{1}{(-1)^8} = \frac{1}{1} = 1$ (ଘାତାଙ୍କ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା)

(iii) $(-1)^{-11} = \frac{1}{(-1)^{11}} = \frac{1}{-1} = -1$ (ଘାତାଙ୍କ ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା)

ଲକ୍ଷ୍ୟକର : $a \neq 0$, $b \neq 0$ ଓ $n \in N$ ହେଲେ, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

ତେଣୁ ଆମେ ପାଇଲେ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ $a, b \in Q$, $a \neq 0, b \neq 0$ ଓ $n \in N$

ଉଦାହରଣ - 12 : ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ପ୍ରକାଶ କର: (i) $(0.1)^{-3}$ (ii) $(0.01)^{-2}$

ସମାଧାନ : (i) $(0.1)^{-3} = \frac{1}{(0.1)^3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{10^3}} = 10^3 = 1000$

(ii) $(0.01)^{-2} = \frac{1}{(0.01)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{(100)^2}} = (100)^2 = 10000$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (c)

1. ନିମ୍ନ ରାଶିର ମାନକୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) 2^{-2} (ii) 2^{-4} (iii) 3^{-3} (iv) 3^{-5}

(v) 10^{-4} (vi) 5^{-3} (vii) 20^{-3} (viii) 50^{-3}

(ix) 100^{-1} (x) $(0.1)^5$ (xi) $(-1)^{-1}$ (xii) $(-1)^{-27}$

2. ଘାତାଙ୍କ ବିହୀନ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ (iii) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-4}$ (iv) $(0.2)^3$

(v) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$ (vi) $\left(\frac{3}{10}\right)^{-3}$ (vii) $(-1)^{-101}$ (viii) $(-1)^{1000}$

3. ଋଣାତ୍ମକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ରାଶିରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) 3^6 (ii) 6^3 (iii) -216 (iv) 625 (v) 343 (vi) $\frac{1}{512}$ (vii) $\frac{64}{729}$

5.5 ପରିମେୟ ଘାତାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ରାଶି :

n ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, a^n ସଂପର୍କରେ ଆମେ ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଆଲୋଚନା କରି ସାରିଛେ । ବର୍ତ୍ତମାନ n ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, a^n ର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିବା । (ଏଠାରେ ମନେରଖିବାକୁ ହେବ ଯେ,a ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।)

ମନେକର $a \in Q$ ଓ $a > 0$ । ଯଦି n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା x ଅଛି ଯେପରିକି $x^n = a$

ଏଠାରେ x କୁ ଆମେ $\sqrt[n]{a}$ ବା $a^{\frac{1}{n}}$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା ଓ ଏହାକୁ a ର n - ତମ ମୂଳ କହୁ ।
$x^n = a \Rightarrow x = a^{\frac{1}{n}}$ ବା $\sqrt[n]{a}$, $(a > 0)$ ଫଳରେ ତୁମେ ଜାଣିଲ, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

କିନ୍ତୁ ଏଠାରେ $\sqrt[n]{a}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସଦାବେଳେ ନ ହୋଇ ପାରେ । ଏହା ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇପାରେ ଯାହା ସହ ଆମେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଶ୍ରେଣୀରେ ପରିଚିତ ହେବା । ତେଣୁ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଶ୍ରେଣୀରେ ଆମେ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଆଧାର ଏବଂ ପରିମେୟ ଘାତାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶିର ଆଲୋଚନା କରିବା । କିନ୍ତୁ ଏଠାରେ କେତେକ ଉଦାହରଣ ଆଲୋଚନା କରିବା, ଯେଉଁ ସବୁ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\sqrt[n]{a}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ : $a^5 = 32$ ହେଲେ, $a = \sqrt[5]{32}$ ବା $(32)^{\frac{1}{5}}$ ଅର୍ଥାତ୍ 32ର ପଞ୍ଚମ ମୂଳ $a = 2$.

(ଏଠାରେ ପରିମେୟ ଆଧାର ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ଘାତ ରାଶି ପାଇଁ ଯେଉଁ ନିୟମଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ, ପରିମେୟ ଆଧାର ଏବଂ ପରିମେୟ ଘାତାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶି ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ସେହି ନିୟମଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । (ପ୍ରମାଣ ପରେ ଜାଣିବ ।)

ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା,

$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$a, b > 0$
$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$a, b \in Q$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$m, n \in Q$
$(ab)^m = a^m \times b^m$ ଏବଂ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	

ଉଦାହରଣ – **13 :** ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $(343)^{\frac{1}{3}}$ (ii) $(1024)^{\frac{1}{5}}$ (iii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{2}{5}}$

ସମାଧାନ : (i) $(343)^{\frac{1}{3}} = (7 \times 7 \times 7)^{\frac{1}{3}} = (7^3)^{\frac{1}{3}} = 7^{3\times\frac{1}{3}} = 7$

(ii) $(1024)^{\frac{1}{5}} = (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4)^{\frac{1}{5}} = (4^5)^{\frac{1}{5}} = 4^{5\times\frac{1}{5}} = 4$

(iii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{2}{5}} = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^5\right\}^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5\times\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

ଉଦାହରଣ – **14 :** ସରଳ କର: $(0.4)^2 \times (0.125)^{\frac{1}{3}} \div \left(2\frac{1}{2}\right)^{-3}$

ସମାଧାନ : $(0.4)^2 \times (0.125)^{\frac{1}{3}} \div \left(2\frac{1}{2}\right)^{-3} = 0.16 \times \left\{(0.5)^3\right\}^{\frac{1}{3}} \div \left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$

$= 0.16 \times (0.5)^{3\times\frac{1}{3}} \div \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{16}{100} \times \frac{5}{10} \div \frac{8}{125} = \frac{2}{25} \times \frac{125}{8} = \frac{5}{4}$

ଅନୁଶୀଳନୀ – 5 (d)

1. ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $64^{\frac{2}{3}}$ (ii) $16^{1\frac{1}{4}}$ (iii) $125^{1\frac{2}{3}}$

(iv) $\left(\frac{81}{625}\right)^{\frac{1}{4}}$ (v) $\left(\frac{1}{216}\right)^{\frac{-2}{3}}$ (vi) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-1\frac{2}{3}}$

2. ସରଳ କର :

(i) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2}$ (ii) $8^3 \times 4^{\frac{1}{2}} \div 16^2$ (iii) $27^{1\frac{1}{3}} \times \sqrt{\frac{1}{9}} \div 81^{-\frac{1}{4}}$

(iv) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \times 4^0 \times \left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}$ (v) $\left(\sqrt[3]{25}\right)^2 \times (125)^{\frac{1}{3}} \times (625)^{\frac{1}{4}}$ (vi) $(343)^{\frac{1}{3}} \times (49)^{\frac{1}{2}} \div 14$

3. ସରଳ କର :

(i) $(a^l)^{m-n} \times (a^m)^{n-l} \times (a^n)^{l-m}$ $(a \neq 0)$, $(1, m, n \in Q)$

(ii) $\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{p+q} \times \left(\frac{a^q}{a^r}\right)^{q+r} \times \left(\frac{a^r}{a^p}\right)^{r+p}$ $(a \neq 0)$, $(p, q, r \in Q)$

4. ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

(i) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$ $(a > 0, b > 0)$ (ii) $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)$ $(x > 0, y > 0)$

*****

ବର୍ଗ-ବର୍ଗମୂଳ ଏବଂ ଘନ-ଘନମୂଳ
(SQUARE-SQUARE ROOTS & CUBE-CUBE ROOTS)

ଅଧ୍ୟାୟ
6

MEMZQ2

6.1 ଉପକ୍ରମ (Introduction) :

ପୂର୍ବ ଅଧ୍ୟାୟରେ ପରିମେୟ ଆଧାର ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶି ସଂପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଯଦି ଆଧାର 'a' ଏବଂ ଘାତ 2 ହୁଏ ତେବେ ଘାତରାଶିଟି ହେବ a^2 । ଦୁଇଟି 'a' ର ଗୁଣଫଳକୁ a^2 ଭାବେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ । a^2କୁ a ର ବର୍ଗ(square) ବା ଦ୍ୱିତୀୟ ଘାତ କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ $a \times a = a^2$ ।

ସେହିପରି $a \times a \times a = a^3$ ଅର୍ଥାତ୍ ତିନୋଟି 'a' ର ଗୁଣଫଳକୁ 'a' ର ଘନ ବା 'a' ର ତୃତୀୟ ଘାତ ଭାବେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

ଅତଏବ କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାକୁ ସେହି ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଗୁଣିଲେ, ଗୁଣଫଳକୁ ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଉକ୍ତ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାର **ବର୍ଗମୂଳ (Square root)** କୁହାଯାଏ । ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ବର୍ଗମୂଳ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଏକ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ । ଏହା ବ୍ୟତୀତ ଘନମୂଳ (Cube root) ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପ୍ରଣାଳୀର ଆଲୋଚନା ମଧ୍ୟ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଅନ୍ୟ ଏକ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ । ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଏବଂ ଘନ ନିର୍ଣ୍ଣୟର କିଛି ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀର ଆଲୋଚନା ସହ ଗାଣିତିକ ସଂରଚନା (Mathematical Pattern) ମାଧ୍ୟମରେ ଏଗୁଡ଼ିକର ଉପସ୍ଥାପନା ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟରେ କରାଯାଇଛି ।

6.2 ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା (Square of a Number and Perfect Square Number):

ଯଦି m ଗୋଟିଏ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଓ n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $n = m^2$ ହୁଏ, ତେବେ 'n' ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା (Perfect Square number) ହେବ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ : $2 \times 2 = 2^2$, $2^2 = 4$, ତେଣୁ 2 ର ବର୍ଗ 4 । ସେହିପରି (–2) ର ବର୍ଗ 4 । $\therefore$ 4 ର ବର୍ଗମୂଳକୁ ± 2 ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।

0 ଓ ±1 ଠାରୁ ±10 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗର ସାରଣୀ

ସାରଣୀ – 6.1

ସଂଖ୍ୟା	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9	±10
ବର୍ଗ	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 1, 4, 9, 16, 25 .... ଆଦି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାକୁ **ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା (Perfect Square numbers)** କୁହାଯାଏ । ପ୍ରକାଶ ଥାଉକି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା ବା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ନୁହଁନ୍ତି । ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମୌଳିକ ଗୁଣନୀୟକ ଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଡ଼ିଯୋଡ଼ି କରି ସଜାଇ ଲେଖି ହେବ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $576 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଏହାର ବିସ୍ତୃତ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ ।

6.3 ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଧର୍ମ (Some Properties of Perfect Square numbers):

(a) ପ୍ରତ୍ୟେକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କଟି 0, 1, 4, 5, 6 କିମ୍ବା 9 ହେବ । କିନ୍ତୁ 2, 3, 7, 8 କୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ହେବ ନାହିଁ । (ସାରଣୀ 6.1 ଦେଖ)

କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ଶେଷରେ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟକ ଶୂନ ଥିଲେ ସେହି ସଂଖ୍ୟାଟି ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ନାହିଁ ।

(b) **ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ।**

(c) ନିମ୍ନ ସଂରଚନାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

$2^2 = 4 = 3 \times 1 + 1$ $\quad$ $2^2 = 4 = 4 \times 1$

$3^2 = 9 = 3 \times 3$ $\quad$ $3^2 = 9 = 4 \times 2 + 1$

$4^2 = 16 = 3 \times 5 + 1$ $\quad$ $4^2 = 16 = 4 \times 4$ ଇତ୍ୟାଦି

ଉକ୍ତ ସଂରଚନାରୁ ଆମେ ପାଇବା –

1 ରୁ ବଡ଼ ଯେକୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାକୁ 3 ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ 0 କିମ୍ବା 1 ରହିବ ।

ସେହିପରି **1 ରୁ ବଡ଼ ଯେକୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାକୁ 4 ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ 0 କିମ୍ବା 1 ରହିବ ।**

(d) **କୌଣସି ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା n କୁ ଯଦି କୌଣସି ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା p ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରାଯାଏ, ତେବେ ଗୁଣଫଳ 'pn' ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ନାହିଁ ।** ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ 64 ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ଏହାର 2 ଗୁଣ ବା 3 ଗୁଣ (ଅଥବା ଯେକୌଣସି ମୌଳିକ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ) ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ନାହିଁ ।

(e) **ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ (Pythagorean triplets)**

ଏକ ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟୀ (Triplet) m, n, p ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ m, n, p ମଧ୍ୟରେ p ବୃହତ୍ତମ ସଂଖ୍ୟା ଥାଇ ଯଦି , $m^2 + n^2 = p^2$ ହୁଏ, ତେବେ (m, n, p) କୁ **ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ (Pythagorean triplet)** କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ (3, 4, 5) ଏବଂ (5, 12, 13) ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ ।

ଯେକୌଣସି ସଂଖ୍ୟା $m (m > 1)$ ପାଇଁ $(2m, m^2–1, m^2+1)$ ଏକ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ ହେବେ ।

ଉଦାହରଣ : $m = 5$ ପାଇଁ $2m = 10$, $m^2–1 = 5^2–1 = 24$ ଏବଂ $m^2+1= 5^2+1 = 26$

ଏଠାରେ $10^2 + 24^2 = 26^2$ ଅର୍ଥାତ୍ (10, 24, 26) ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟକୁ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ କୁହାଯିବ ।

ମନେରଖ :

(i) ଯଦି m(m>1) ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ ତେବେ (m, $\frac{m^2-1}{2}$ ଓ $\frac{m^2+1}{2}$) ଏକ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ ହେବ ।

(ii) ଯଦି m(m>2) ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ ତେବେ (m, $\left(\frac{m}{2}\right)^2-1$ ଓ $\left(\frac{m}{2}\right)^2+1$) ଏକ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ ହେବ ।

ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

(f) ନିମ୍ନ ସଂରଚନାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

$2^2 - 1^2 = 3 = 2 + 1$

$3^2 - 2^2 = 5 = 3 + 2$

$4^2 - 3^2 = 7 = 4 + 3$ ଇତ୍ୟାଦି

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡ଼େ ଯେ, **ଦୁଇ କ୍ରମିକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାର ଅନ୍ତର, ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ହେବ ।**

ବିପରୀତ କ୍ରମେ **କୌଣସି ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗର ଅନ୍ତର ରୂପେ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇ ପାରିବ ।**

ନିମ୍ନ ସଂରଚନାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

$3 = 3 . 1 = \left(\frac{3+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-1}{2}\right)^2 = 2^2 - 1^2$

$5 = 5 . 1 = \left(\frac{5+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5-1}{2}\right)^2 = 3^2 - 2^2$

$7 = 7 . 1 = \left(\frac{7+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{7-1}{2}\right)^2 = 4^2 - 3^2$ ଇତ୍ୟାଦି

(g) ନିମ୍ନ ସଂରଚନାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

$1^2 = 1$ (ପ୍ରଥମ ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା)

$2^2 = 1 + 3$ (ପ୍ରଥମ ଦୁଇଟି ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି)

$3^2 = 1 + 3 + 5$ (ପ୍ରଥମ ତିନୋଟି ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି)

$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$ (ପ୍ରଥମ ଚାରୋଟି ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି)

ଉକ୍ତ ସଂରଚନାରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, **କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ, (ସେହି ସଂଖ୍ୟକ) ପ୍ରଥମ ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ।** ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : ପ୍ରଥମ ଆଠଗୋଟି ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି, 8^2 ସହ ସମାନ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 8^2$ ବା 64

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6 (a)

1. **ନିମ୍ନ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।**
   27, 37, 46, 118, 225
2. **ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ନୁହଁନ୍ତି । କାରଣ ଦର୍ଶାଅ ।**
   64000, 89722, 2220, 505050, 1057, 23453, 222222
3. **ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ ଅଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା ଏବଂ କେଉଁଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା । କାରଣ ସହ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।**
   28, 113, 278, 314, 4315, 23872

4. 100 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ମୌଳିକ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀମାନ ସ୍ଥିର କର ।
(ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀ ମଧ୍ୟରେ ଯଦି ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ନଥାଏ, ତେବେ ସେମାନେ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟୀ ହେବେ ।)

5. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ଦୁଇଟି ବର୍ଗର ଅନ୍ତର ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।
19, 27, 31, 41, 53

6. କେତେକ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀର ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ସଂଖ୍ୟା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି । ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗରେ ପିଥାଗୋରୀୟ ତ୍ରୟୀଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।
7, 11, 15, 12, 16

7. **ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧଗୁଡ଼ିକର ବିଭିନ୍ନ ସଂରଚନାଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।**

(a)
$1^2 = 1$
$11^2 = 121$
$111^2 = 12321$
$1111^2 = 1234321$
$11111^2 = ...$
$111111^2 = ...$

(b)
$11^2 = 121$
$101^2 = 10201$
$1001^2 = 1002001$
$100001^2 = ...$
$10000001^2 = ...$

(c)
$11^2 = 121$
$101^2 = 10201$
$10101^2 = 102030201$
$1010101^2 = ...$
$101010101^2 = ...$

(d)
$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$
$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$
$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$
$4^2 + 5^2 + ... = 21^2$
$5^2 + ... + 30^2 = ...^2$

(e)
11^2 x (11^2 ରେ ଥିବା ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି) = 22^2
[ଅର୍ଥାତ୍ $11^2(1 + 2 + 1) = 484 = 22^2$]
111^2 x (111^2 ରେ ଥିବା ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି) = 333^2
1111^2 x (1111^2 ରେ ଥିବା ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି) = ...
11111^2 x (11111^2 ରେ ଥିବା ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି) = ...

(f)
$7^2 = 49$
$67^2 = 4489$
$667^2 = 444889$
$6667^2 = 44448889$
$66667^2 = ...$
$666667^2 = ...$

8. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।
$18^2 - 17^2 = ...$ $25^2 - 24^2 = ...$
$112^2 - 111^2 = ...$ $171^2 - 170^2 = ...$

9. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଯେଉଁ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ଠିକ୍ ତା' ପାଖରେ (✓) ଚିହ୍ନ ଏବଂ ଯେଉଁ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ଭୁଲ୍ ତା' ପାଖରେ (✗) ଚିହ୍ନ ଦିଅ ।
(a) ଗୋଟିଏ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାରେ ଥିବା ଅଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ଯୁଗ୍ମ ।
(b) ଗୋଟିଏ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ।

(c) କୌଣସି ଗୋଟିଏ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

(d) ଦୁଇଟି ବର୍ଗସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ଏକ ବର୍ଗସଂଖ୍ୟା ।

(e) ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ।

(f) ଗୋଟିଏ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ଏକ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ।

(g) ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ 1 ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟିର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ସର୍ବଦା 1 ହେବ ।

6.4. ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ବର୍ଗ ନିରୂପଣ ପ୍ରଣାଳୀ (Short cut method to find square numbers):

(a) **ଏକକ ସ୍ଥାନରେ 5 ଥିବା ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :**

ଲକ୍ଷ୍ୟକର : $15^2 = 225, 25^2 = 625, 35^2 = 1225, 45^2 = 2025, 55^2 = 3025$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ଏଠାରେ ସଂଖ୍ୟାଟିର ଏକକ ସ୍ଥାନରେ 5 ରହିଲେ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାର ଏକକ ଓ ଦଶକ ସ୍ଥାନର ଅଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ 5 ଏବଂ 2 ରହୁଛି । ଶତକ ସ୍ଥାନରେ, ସଂଖ୍ୟାଟିର ଦଶକ ସ୍ଥାନର ଅଙ୍କ ଏବଂ ତା'ର ପରବର୍ତ୍ତୀ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ରହୁଛି ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର : $15^2 = (1 \times 2)\ 100 + 25; 25^2 = (2 \times 3)\ 100 + 25$ ଏବଂ

$35^2 = (3 \times 4)\ 100 + 25....$

$125^2 = (12 \times 13)\ 100 + 25 = 15625$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ଏଥିରେ ବ୍ୟବହୃତ କୌଶଳଟିକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିବା ।

ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଖ୍ୟାର ରୂପ ହେଉଛି $(10n + 5), n \in N$.

$\therefore (10n + 5)^2 = (10n)^2 + 2.10n.5 + (5)^2$

$= 100n^2 + 100n + 25$

$= \{n \times (n+1)\}\ 100 + 25$

(b) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ଅଭେଦ ପ୍ରୟୋଗରେ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \Rightarrow a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$.....(i)

ଏହି ସୂତ୍ର (i) ର ପ୍ରୟୋଗରେ ଆସ କେତେକ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ନିରୂପଣ କରିବା ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ : $a = 17$

ଏଠାରେ ଦେଖିବାକୁ ପଡ଼ିବ 17 ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଟି 10 ର ଗୁଣିତକ । 17 ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ (10 ର ଗୁଣିତକ) ସଂଖ୍ୟାଟି 20.

$a = 17$ ଥିଲାବେଳେ $b = 3$ ଅର୍ଥାତ୍ (20 – 17) ନିଆଯାଉ ।

$\therefore 17^2 = (17 + 3)(17 - 3) + 3^2$ [$a^2 = (a+b)(a-b) + b^2$ ସୂତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ]

$= 20 \times 14 + 9 = 289$

ସେହିପରି ଆସ 36 ର ବର୍ଗ ନିରୂପଣ କରିବା ।

$a^2 = (a+b)(a-b) + b^2$

ଯେହେତୁ 36 ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ 10 ଗୁଣିତକ ସଂଖ୍ୟା 40)

$a = 36$ ହେଲେ, $b = 4$ ହେବ ।

$\therefore 36^2 = (36 + 4)(36 - 4) + 4^2 = 40 \times 32 + 16 = 1280 + 16 = 1296$

(c) **$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ ଅଭେଦ ପ୍ରୟୋଗରେ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :**

ଆମେ ଜାଣିଛେ, $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$\Rightarrow (x + a)(x + b) = x(x + a + b) + ab$......... (ii)

ସୂତ୍ର (ii) ର ପ୍ରୟୋଗରେ ଆସ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ସ୍ଥିର କରିବା ।

$17^2 = (17 \times 17)$
$= (10 + 7)(10 + 7) = 10(10 + 7 + 7) + 7 \times 7$
$= 10 \times 24 + 49 = 289$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର $a = b = 7$ ଏବଂ ଆଧାର 10

ସେହିପରି $36^2 = 36 \times 36$
$= (40 - 4) \times (40 - 4)$
$= 40\{40 + (-4) + (-4)\} + (-4) \times (-4))$
(ଏଠାରେ $a = b = -4$ ଏବଂ ଆଧାର 40)
$= 40 \times 32 + 16 = 1280 + 16 = 1296$

(d) **$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ସୂତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗରେ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :**

ଦତ୍ତ ଅଭେଦର ପ୍ରୟୋଗରେ ଆସ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ସ୍ଥିର କରିବା ।

$13^2 = (10 + 3)^2 = 100 + 60 + 3^2 =$ 16 ଦଶ+ 9ଏକ $= (13 + 3)\,10 + 3^2 = 169$

ସେହିପରି $14^2 = (14 + 4)\,10 + 4^2 = 196$, $17^2 = (17 + 7)\,10 + 7^2 = 289$

ଏବଂ $18^2 = (18 + 8)\,10 + 8^2 = 324$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ସେହିପରି $108^2 = (100 + 8)^2 = 10000 + 1600 + 64$
$= (100 + 16)$ ଶତ $+ 64$ ଏକ
$= (100 + 2 \times 8)\,100 + 8^2$

ସେହିପରି $105^2 = (100 + 2 \times 5)\,100 + 5^2 = 11025$

ଆସ 92 ର ବର୍ଗ ସ୍ଥିର କରିବା ଯେଉଁଥିରେ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରିବା ।

$92^2 = (100 - 8)^2 = 10000 - 1600 + 64 = (100 - 16)\,100 + 64$
$= (100 - 2 \times 8)\,100 + 8^2 = 8464$

$97^2 = (100 - 3)^2 = 10000 - 600 + 9 = (100 - 6)\,100 + 9$
$= (100 - 2 \times 3)\,100 + 3^2 = 9409$

ସେହିପରି $95^2 = (100 - 5)^2 = (100 - 2 \times 5)100 + 5^2 = 9025$

ଅନ୍ୟାନ୍ୟ କେତେକ ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ବର୍ଗ ନିରୂପଣ ପ୍ରଣାଳୀ ମଧ୍ୟ ରହିଛି । ସେଗୁଡ଼ିକ ତୁମେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ଶିଖିବ ।

6.5. ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ (Square of rational numbers):

ଆମେ ଜାଣିଛେ, $m, n \in Z$ ଓ $n \neq 0$ ହୋଇ $\frac{m}{n} \in Q$ ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{m}{n}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ନିରୂପଣ ଲାଗି ନିମ୍ନ ନିୟମକୁ ଦେଖ ।

$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m}{n} \times \frac{m}{n} = \frac{m \times m}{n \times n} = \frac{m^2}{n^2}$ । ଏଣୁ ଆମେ ପାଇବା $\boxed{\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}}$

ଉଦାହରଣ - 1 :

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ ସ୍ଥିର କର: (i) $\frac{3}{5}$ (ii) 0.021 (iii) 0.02 (iv) 3.55

ସମାଧାନ : (i) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

(ii) $(0.021)^2 = \left(\frac{21}{1000}\right)^2 = \frac{(21)^2}{(1000)^2} = \frac{441}{1000000} = 0.000441$

(iii) $(0.02)^2 = \left(\frac{2}{100}\right)^2 = \frac{4}{10000} = 0.0004$

(iv) $(3.55)^2 = \left(\frac{355}{100}\right)^2 = \frac{126025}{10000} = 12.6025$

$[355^2 = (35 \times 36)\ 100 + 25 = 126000 + 25 = 126025]$

ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକରୁ ତୁମେ ଜାଣିଲ ମୂଳ ସଂଖ୍ୟାରେ ଦଶମିକ ପରେ ଗୋଟିଏ ଅଙ୍କ ଥିଲେ ବର୍ଗସଂଖ୍ୟାରେ ଦଶମିକ ପରେ ତା'ର ଦୁଇଗୁଣ ସଂଖ୍ୟକ ଅଙ୍କ ରହିବ । 3.55 ରେ ଦଶମିକ ପରେ ଦୁଇଟି ଅଙ୍କ ଥିବାରୁ ଏହାର ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାରେ ଦଶମିକ ପରେ ଚାରୋଟି ଅଙ୍କ ରହିବ ।

ଯେପରି $(3.55)^2 = 12.6025$

ଉଦାହରଣ - 2 :

ନିମ୍ନ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ?

(i) $\frac{121}{625}$ (ii) 0.004 (iii) 2.56

ସମାଧାନ : (i) $\frac{121}{625} = \frac{11 \times 11}{5 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{11^2}{(5 \times 5)^2} = \left(\frac{11}{25}\right)^2$ $\therefore$ $\frac{121}{625}$ ଗୋଟିଏ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ।

(ii) $0.004 = \frac{4}{1000} = \frac{2^2}{1000}$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର 1000 କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ନୁହେଁ । ତେଣୁ 0.004 କୌଣସି ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ନୁହେଁ ।

(iii) $2.56 = \frac{256}{100} = \left(\frac{16}{10}\right)^2$ $\therefore$ 2.56 ଏକ ବର୍ଗସଂଖ୍ୟା ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6 (b)

1. ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନରେ ନିମ୍ନସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ ସ୍ଥିର କର ।
   45, 55, 85, 105, 155, 255
2. ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ନିମ୍ନସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
   27, 37, 46, 78, 98
3. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ଅଭେଦର ପ୍ରୟୋଗରେ 19, 102, 107 ର ବର୍ଗ ସ୍ଥିର କର ।
4. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ଅଭେଦର ପ୍ରୟୋଗରେ 93, 95, 98 ର ବର୍ଗ ସ୍ଥିର କର ।
5. $52^2 = (5^2 + 2)\ 100 + 2^2 = 2704$, $57^2 = (5^2 + 7)100 + 7^2 = 3249$
   ଉପରୋକ୍ତ ଦୁଇଟି ବର୍ଗ ନିରୂପଣ ପ୍ରଣାଳୀ ଅନୁସରଣରେ 51, 54, 56, 58, 59 ର ବର୍ଗମାନ ସ୍ଥିର କର ।

6. $45^2 = 4 \times (4 + 1)\ 100 + 5^2$,

$55^2 = 5 \times (5 + 1)\ 100 + 5^2$ ଏବଂ $65^2 = 6 \times (6 + 1)100 + 5^2$

ଉପରୋକ୍ତ ବର୍ଗ ନିରୂପଣ ପ୍ରଣାଳୀ ଅନୁସରଣରେ 35, 75, 95, 115, 205 ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ ନିରୂପଣ କର ।

7. 0.12, 1.11, 0.003 ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ ସ୍ଥିର କର ।

8. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।
121, 1009, 65.61, 0.00256, 0.36, 12.321

6.6. ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳ :

ସଂଜ୍ଞା : m ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $m^2 = n$ ହେଲେ, n ର ବର୍ଗମୂଳ m ।

ତୁମେ ଜାଣିଛ $5^2 = 25$ ଏବଂ $(-5)^2 = 25$

ଏଣୁ ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ, ଆମେ କହିବା, 25 ର ବର୍ଗମୂଳ + 5 ଓ –5 [± 5 ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ]

ଏଠାରେ ଆମେ ଦେଖିଲେ, 25 ର ବର୍ଗମୂଳ ଧନାତ୍ମକ ଓ ଅନ୍ୟଟି ଋଣାତ୍ମକ ।

ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ ସୂଚକ ଚିହ୍ନ ହେଉଛି $\sqrt{\ }$ ।

$\therefore \sqrt{25}$, 25 ର ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ = 5, $-\sqrt{25}$, 25 ର ଋଣାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ = –5

ତେଣୁ 25 ର ବର୍ଗମୂଳ $= \pm \sqrt{25} = \pm 5$

ପ୍ରଥମ ଦଶଗୋଟି ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ସାରଣୀ – 6.2

ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗସଂଖ୍ୟା	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
ଦତ୍ତସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳ	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7	± 8	± 9	±10

6.7 ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପ୍ରଣାଳୀ :

ପ୍ରଥମ ପ୍ରଣାଳୀ : ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ମାଧ୍ୟମରେ ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ:

ଉଦାହରଣ – 3 : 36 ର ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$, $\sqrt{36} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 3^2} = 2 \times 3 = 6$

$(-6)^2 = 36$ ହେତୁ 36 ର ଋଣାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ $= -\sqrt{36} = -6$

$\therefore$ 36 ର ବର୍ଗମୂଳ $= \pm\sqrt{36} = \pm 6$

ଉଦାହରଣ – 4 : $\pm \sqrt{144}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$\sqrt{144} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3^2} = 2 \times 2 \times 3 = 12$

$\therefore \pm \sqrt{144} = \pm 12$

ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଭାଗକ୍ରିୟା ମାଧ୍ୟମରେ ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଉଦାହରଣ – 5 : 126025 ର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

355
3) $\overline{12}$ $\overline{60}$ $\overline{25}$ $3^2 = 9$
+3 (–9)
65) 3 60
+5 (–)3 25 $65 \times 5 = 325$
705) 35 25
(–) 35 25 $705 \times 5 = 3525$
0

(i) ବର୍ଗସଂଖ୍ୟାଟି ଛଅ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ । ତେଣୁ ଡାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱରୁ ଯୋଡ଼ି ଯୋଡ଼ି ଅଙ୍କ ନେଲେ ଏହା ତିନିଯୋଡ଼ା ହେବ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଯୋଡ଼ା ଉପରେ '–' ଚିହ୍ନ ଦିଅ ।

(ii) ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱର ପ୍ରଥମ ଯୋଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା 12, 12 ରୁ ସାନ ବୃହତ୍ତମ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା 9,
∴ ବର୍ଗମୂଳ ପାଇଁ ଭାଗଫଳ ସ୍ଥାନରେ 3 ଲେଖ ।

(iii) ଭାଗଶେଷ 3 ଲେଖ । ଡାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଦୁଇଅଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା 60 ଲେଖ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଭାଜ୍ୟ 360 ହେବ ।

(iv) ପ୍ରଥମ ଭାଜକ 3 ସହ 3 ଯୋଗ କରି ଦ୍ୱିତୀୟ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ଅଙ୍କ 6 ଲେଖ ।

(v) ଏକକ ସ୍ଥାନରେ 5 ଓ ବର୍ଗମୂଳ (ଭାଗଫଳ) ସ୍ଥାନରେ 5 ଲେଖି $65 \times 5 = 325$, 360 ର ଠିକ୍ ତଳେ ଲେଖ ।
∵ $66 \times 6 = 396$ ବର୍ଗମୂଳ ସ୍ଥାନରେ 6 ନେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି 360 ରୁ ଅଧିକ ହେବ ।

(vi) ବର୍ତ୍ତମାନ ଭାଗଶେଷ 35 ର ଡାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଶେଷ ଦୁଇଟି ଅଙ୍କ 25 ଲେଖ ଏବଂ ଭାଜକ 65 ସହ 5 ଯୋଗକରି ନୂତନ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ଦୁଇ ଅଙ୍କ 70 ଲେଖ ।

(vii) ବର୍ତ୍ତମାନ ବର୍ଗମୂଳ ସ୍ଥାନରେ 5 ଏବଂ ଭାଜକର ଏକକ ସ୍ଥାନରେ 5 ଲେଖି $705 \times 5 = 3525$ ଲେଖ । ଭାଜ୍ୟ ସ୍ଥାନରେ 3525 ଥିବାରୁ $3525 - 3525 = 0$ ଭାଗଶେଷ ରହିବ ।∴ 126025 ର ବର୍ଗମୂଳ $= \pm 355$

ଭାଗକ୍ରିୟା ଦ୍ୱାରା ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ କେତେକ ଜାଣିବା କଥା:

(a) ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାର (ଯାହାର ବର୍ଗମୂଳ ସ୍ଥିର କରାଯିବ) ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଡ଼ି ଯୋଡ଼ି କଲାପରେ ଯଦି କୌଣସି ବଳକା ଅଙ୍କ ଥାଏ, ତେବେ ସଂଖ୍ୟାର ବାମ ପାଖରେ 0 ବସାଇ ବଳକା ଅଙ୍କ ସହ ଗୋଟିଏ ଅଙ୍କ–ଯୋଡ଼ି କରାଯିବ ।
(i) ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାରେ ଯେତୋଟି ଅଙ୍କ–ଯୋଡ଼ି ଥିବ, ଭାଗକ୍ରିୟା ସେତିକିଟି ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ସମ୍ପାଦିତ ହେବ ।
(ii) ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଯୋଡ଼ି ଅଙ୍କ ଲାଗି ବର୍ଗମୂଳରେ ଗୋଟିଏ ଅଙ୍କ ମିଳିବ ।

(b) ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଆଲୋଚନାରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟି ଦେଖି ଏହାର ବର୍ଗମୂଳରେ କେତୋଟି ଅଙ୍କ ରହିବ ତାହା ଜାଣିପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ – 6 : 2 5 6 6 4 0 4 ର ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

	1 6 0 2
1	$\overline{02}$ $\overline{56}$ $\overline{64}$ $\overline{04}$
	(–)1
+1	
26	1 56
+6	(–)1 56
320	0 64
+0	(–) 00
3202	64 04
	(–) 64 04
	0

(i) ସଂଖ୍ୟାଟି ସାତ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ ଏକ ଶୂନ ବସାଇ ଏହାକୁ ଚାରିଯୋଡ଼ା ସଂଖ୍ୟାରେ ପରିଣତ କର ।

(ii) ପ୍ରତି ଦୁଇ ଅଙ୍କକୁ ଡାହାଣପାର୍ଶ୍ୱରୁ ରେଖାଙ୍କିତ କର ।

(iii) 2 ରୁ ସାନ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା 1 ।
$2 - 1 = 1$, ବର୍ଗମୂଳ ସ୍ଥାନରେ 1 ଲେଖ ।

(iv) ଦ୍ୱିତୀୟ ଭାଜ୍ୟ 156
1 ରେ 1 ଯୋଗ କରି ଦ୍ୱିତୀୟ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ଅଙ୍କ 2 ଲେଖ ।

(v) ଦ୍ୱିତୀୟ ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ 26 x 6 = 156 ଭାଜ୍ୟ । 156 ନିମ୍ନରେ ଲେଖ ।

(vi) ବର୍ଗମୂଳ (ଭାଗଫଳ) ସ୍ଥାନରେ 6 ଲେଖ ।

(vii) 156 – 156 = 0, ଭାଗଶେଷ 0 ପରେ 64 ଲେଖ ।

26 + 6 = 32 କୁ ତୃତୀୟ ଭାଜକ ସ୍ଥାନରେ ଲେଖ । ଆଉ ଏକ ଅଙ୍କ ଏକକ ସ୍ଥାନରେ ଲେଖିଲେ ଏହା ତିନି ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ହେବ । କିନ୍ତୁ ଭାଜ୍ୟ ଦୁଇ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ହେତୁ ଏଠାରେ ବର୍ଗମୂଳ ସ୍ଥାନରେ 0 ଲେଖାଯିବ ।

(viii) 64 ର ନିମ୍ନରେ 320 x 0 = 0 ଲେଖି ବିୟୋଗ କଲେ ଭାଗଶେଷ 64 ହେବ । 64 ର ଡାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଶେଷ ଦୁଇଅଙ୍କ 04 ଲେଖ ।

(ix) ଚତୁର୍ଥ ଭାଜ୍ୟ 6 4 0 4 ଏବଂ ଭାଜକ 320 + 0 = 320 ଲେଖ । ବର୍ତ୍ତମାନ 320 ର ଡାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ 2 ଲେଖିଲେ ଚତୁର୍ଥ ଭାଜକଟି 3202 ହେବ । ବର୍ଗମୂଳ ସ୍ଥାନରେ 2 ଲେଖ ।

(x) 3202 x 2 = 6404, ଭାଜ୍ୟ 6404 – 6404 = 0 ଭାଗଶେଷ 0 ରହିବ ଏବଂ ବର୍ଗମୂଳ ସ୍ଥାନରେ 1602 ରହିବ । $\therefore$ 2 5 6 6 4 0 4 ର ବର୍ଗମୂଳ $= \pm\sqrt{2566404} = \pm 1602$

ଉଦାହରଣ – 7 : 4 7 7 4 2 2 5 ର ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଉଦାହରଣମାନଙ୍କର ଅନୁସରଣରେ ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇଛି, ଭଲଭାବରେ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।

	2 1 8 5
2	$\overline{04}$ $\overline{77}$ $\overline{42}$ $\overline{25}$
+2	(–)04
41	77
+1	(–) 41
428	3 6 4 2
+8	(–) 3 4 2 4
4365	2 1 8 2 5
	(–) 2 1 8 2 5
	0

$\therefore$ 4774225 ର ବର୍ଗମୂଳ $= \pm\sqrt{4774225} = \pm 2185$

ଉଦାହରଣ – 8 : 6 4 4 3 2 7 2 9 ର ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

		8 0 2 7	
(i) ପ୍ରଥମ ଭାଜକ 8,	8	$\overline{64}\,\overline{43}\,\overline{27}\,\overline{29}$	ବର୍ଗମୂଳ (ଭାଗଫଳ) ସ୍ଥାନରେ ଅଙ୍କ 8 ।
	+ 8	(–)64	
(ii) 2ୟ ଭାଜକ 160,	160	0 4 3	ବର୍ଗମୂଳର ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅଙ୍କ 0 ।
	+ 0	00	
	1602	4 3 2 7	
	+2	3 2 0 4	
(iii) 3ୟ ଭାଜକ 1602,	16047	1 1 2 3 2 9	ବର୍ଗମୂଳର ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅଙ୍କ 2 ।
(iv) 4ର୍ଥ ଭାଜକ 16047		1 1 2 3 2 9	ବର୍ଗମୂଳର ପରବର୍ତ୍ତୀ ତଥା ଶେଷ ଅଙ୍କ 7 ।
		0	

6 4 4 3 2 7 2 9 ର ବର୍ଗମୂଳ $= \pm\sqrt{64432729} = \pm 8027$

6.8. ଦଶମିକ ବର୍ଗସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଯେଉଁ ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ବର୍ଗସଂଖ୍ୟା ଅଟନ୍ତି ସେଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପ୍ରଣାଳୀ ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଏହି ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନରେ ନିମ୍ନ ସୂତ୍ରଟିର ସାହାଯ୍ୟ ନିଆଯାଇଥାଏ ।

a, b ∈ N ହେଲେ, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(A) ଭଗ୍ନାଂଶ (ଲବ ଓ ହର ଉଭୟେ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା) ର ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଉଦାହରଣ - 9 : $7\frac{9}{16}$ ର ବର୍ଗମୂଳ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $7\frac{9}{16}$ ର ବର୍ଗମୂଳ = $\frac{121}{16}$ ର ବର୍ଗମୂଳ = $\pm\sqrt{\frac{121}{16}} = \pm\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{16}}$ $\left[\because \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right]$

$= \pm\frac{11}{4} = \pm 2\frac{3}{4}$ $\therefore$ $7\frac{9}{16}$ ର ବର୍ଗମୂଳ = $\pm 2\frac{3}{4}$

ଉଦାହରଣ - 10 : $10\frac{6}{25}$ ର ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $10\frac{6}{25}$ ର ବର୍ଗମୂଳ = $\frac{256}{25}$ ର ବର୍ଗମୂଳ= $\pm\sqrt{\frac{256}{25}} = \pm\frac{\sqrt{256}}{\sqrt{25}} = \pm\left(\frac{16}{5}\right) = \pm 3\frac{1}{5}$

$\therefore$ $10\frac{6}{25}$ ର ବର୍ଗମୂଳ = $\pm 3\frac{1}{5}$

(B) ଦଶମିକ ଭଗ୍ନାଂଶ (ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା) ର ବର୍ଗମୂଳ :

ଉଦାହରଣ - 11 : 0.053361 ର ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $0.053361 = \frac{53361}{1000000} = \frac{53361}{10^6}$

$\therefore$ 0.053361 ର ବର୍ଗମୂଳ = $\pm\sqrt{\frac{53361}{10^6}} = \frac{\pm\sqrt{53361}}{\sqrt{10^6}} = \pm\frac{231}{10^3} = \pm 0.231$

($\because$ 53361 ର ବର୍ଗମୂଳ = ± 231)

```
2)    05  33  61 (231
       04
-------------------
43)    1 33
       1 29
-------------------
461)     4 61
         4 61
         ----
            0
```

ଉଦାହରଣ - 12 : 23.04 ର ବର୍ଗମୂଳ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : 23.04 ର ବର୍ଗମୂଳ = $\frac{2304}{100}$ ର ବର୍ଗମୂଳ = $\pm\sqrt{\frac{2304}{100}} = \pm\frac{\sqrt{2304}}{\sqrt{100}} = \pm\frac{48}{10} = \pm 4.8$

$\therefore$ 23.04 ର ବର୍ଗମୂଳ = ± 4.8

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

```
4)   23 . 04 (4.8
     16
--------------
88)  7 04
     7 04
     ----
        0
```

$\therefore$ 23.04 ର ବର୍ଗମୂଳ = ± 4.8 ହେବ ।

6.9. ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ ନିରୂପଣ :

1, 4, 9 ଆଦି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଯେ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ, ଏହା ତୁମେ ଜାଣିଛ । ଫଳରେ ସେହି ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ବର୍ଗମୂଳ ମଧ୍ୟ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା । $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{4}{25}$ ଆଦି ବର୍ଗସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳ ମଧ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା – ଏହା ମଧ୍ୟ ତୁମେ ଜାଣ । ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା (ବା ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା) ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳ ନାହିଁ, ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ । ଯଥା : 2ର କୌଣସି ବର୍ଗମୂଳ ନାହିଁ । ଅର୍ଥାତ୍ ଏପରି କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା ନାହିଁ ଯାହାର ବର୍ଗ 2 ହେବ । ତଥାପି 2 ଲାଗି 2.000.... ନେଇ ଭାଗକ୍ରିୟା ପଦ୍ଧତିରେ ଏହାର ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା ।

	1. 414
1	$\bar{2}.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
	(–1)
24	1 00
	– 96
281	400
	– 281
	11900
2824	– 11296

ଏହିପରି ଭାଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା କରି ଚାଲିଲେ ଦେଖିବା ଯେ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ଶେଷ ନାହିଁ । ଅର୍ଥାତ୍ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ 2ର କୌଣସି ବର୍ଗମୂଳ ନାହିଁ । (ଏହାର ଯୁକ୍ତିଭିତ୍ତିକ ପ୍ରମାଣ ପରେ ପଢ଼ିବ) । ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟର ଭାଗକ୍ରିୟାର ଫଳକୁ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରାଯାଉ ।

ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାରେ ଭାଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ଫଳ = 1 ଏବଂ $1^2 = 1$ = ଯାହାକି 2 ଠାରୁ 1 ସାନ ।

ଦଶମିକ ଏକସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଫଳ = 1.4 ଏବଂ $(1.4)^2 = 1.96$ ଯାହାକି 2 ଠାରୁ 0.04 ସାନ ।

ଦଶମିକ ଦୁଇସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଫଳ = 1.41 ଏବଂ $(1.41)^2 = 1.9881$, ଯାହାକି 2 ଠାରୁ 0.0119 ସାନ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ ଆମେ ଭାଗକ୍ରିୟାର ଅଧିକରୁ ଅଧିକ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମ୍ପାଦନ କଲେ ଯେଉଁ ପରିମେୟ ଫଳମାନ ପାଉଛେ ତାହାର ବର୍ଗ କ୍ରମଶଃ 2ର ନିକଟତର ହେଉଛି । ଯେହେତୁ ଭାଗକ୍ରିୟାର କୌଣସି ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଭାଗଶେଷ ହେବ ନାହିଁ ତେଣୁ 2 ର କୌଣସି ପରିମେୟ ବର୍ଗମୂଳ ନାହିଁ । କିନ୍ତୁ ଆମେ କହୁ –

ଦଶମିକ ଏକ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ 2 ର ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ $= \pm 1.4$,

ଦଶମିକ ଦୁଇ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ 2 ର ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ $= \pm 1.41$,

ଦଶମିକ ତିନି ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ 2 ର ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ $= \pm 1.414$..... ଇତ୍ୟାଦି ।

ସେହିପରି 3 ବା 3.0000.... ନେଇ ଭାଗକ୍ରିୟା ପଦ୍ଧତିରେ ଏହାର ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା–

	1. 732
1	$\bar{3}.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
	(–)1
27	2 00
	(–)189
343	1100
	– 1029
3462	7100
	– 6924
	176

ଏଠାରେ ମଧ୍ୟ ଦେଖିଲେ ଯେ –

ଦଶମିକ ଏକ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ 3 ର ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ = ± 1.7

ଦଶମିକ ଦୁଇ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ 3 ର ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ = ± 1.73

ଦଶମିକ ତିନି ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ 3 ର ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ = ± 1.732

ଏହିପରି ବର୍ଗସଂଖ୍ୟା ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ଯେ କୌଣସି ଧନାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ ଦଶମିକର ବିଭିନ୍ନ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ପାରିବା । ନିମ୍ନସ୍ଥ ଉଦାହରଣ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ – 13 :

2.8 ର ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ ଦଶମିକ ତିନିସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

1	$\overline{2}.\overline{80}\ \overline{00}\ \overline{00}$	1.673
	(–) 1	
26	1 80	
	(–) 1 56	
327	24 00	
	(–) 2289	
3343	11100	
	(–) 10029	
	1071	

∴ ଦଶମିକ ତିନିସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

2.8 ର ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ $= \pm 1.673$

ଉଦାହରଣ – 14 : $10\frac{2}{3}$ ର ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ ଦଶମିକ ତିନିସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ପ୍ରଥମ ପ୍ରଣାଳୀ : $10\frac{2}{3}$ ର ଦଶମିକ 6 ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନମାନ = 10.666667

(ଟୀକା : ଦଶମିକ ତିନିସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ ଆବଶ୍ୟକ ଥିବାରୁ ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ 6 ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନମାନ ନିଆଯାଇଛି ।)

	3.265
3	$\overline{10}.\overline{66}\ \overline{66}\ \overline{67}$
	(–)9
62	1 66
	(–) 12 4
646	42 66
	(–) 38 76
6525	39067
	(–) 32625
	6442

∴ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ $= \pm 3.265$

ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରଣାଳୀ : $10\frac{2}{3}$ ର ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ

	9.797
9	$\overline{96}.\overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
	(–) 81
187	1500
	(–) 1309
1949	19100
	(–) 17541
19587	1559 00
	(–)1371 09
	18791

$= \pm\sqrt{10\frac{2}{3}}$ ର ଆସନ୍ନମାନ $= \pm\sqrt{\frac{32}{3}}$ ର ଆସନ୍ନମାନ

$= \pm\sqrt{\frac{96}{9}}$ ର ଆସନ୍ନମାନ $= \pm\frac{\sqrt{96}}{3}$ ର ଆସନ୍ନମାନ

∴ $10\frac{2}{3}$ ର ଆସନ୍ନମାନ $= \pm\frac{9.797}{3} = \pm 3.266$

ଟୀକା : ଦଶମିକ ତିନିସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକତା ଥିଲେ, ଦଶମିକ ଚାରିସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ତହିଁରୁ ଦଶମିକ ତିନିସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନମାନ ନେଲେ ଉନ୍ନତ ଆସନ୍ନମାନ ମିଳିଥାଏ ।

ଯେପରି ଦଶମିକ ଚାରିସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ 10.66666667 ର ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ $= \pm 3.2659$

$10\frac{2}{3}$ ର ଦଶମିକ ତିନିସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ $= \pm 3.266$

ଉଦାହରଣ – 15 : 1.5 ର ବର୍ଗମୂଳ ଦଶମିକ 3 ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

```
1)    1.50 00 00 (1.224
      (–) 1
   ----------------
22)   0.50
      (–) 44
   ----------------
242)    600
      (–) 484
2444)  11600
      (–) 9776
      ----------
        1824
```

$\therefore$ 1.5 ର ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ $= \pm 1.224$

ଉଦାହରଣ – 16 : $\sqrt{3} = 1.732$ ର ହେଲେ $\frac{12}{5\sqrt{3}}$ ର ଆସନ୍ନମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\frac{12}{5\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{15} = \frac{12(1.732)}{15} = \frac{4(1.732)}{5} = \frac{6.928}{5} = 1.3856$

ଉଦାହରଣ – 17 : $\sqrt{2} = 1.414$ ହେଲେ $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2-(1)^2} = \frac{2+1-2\sqrt{2}}{2-1} = \frac{3-2\sqrt{2}}{1}$

(ପରିମେୟ ହର ବିଶିଷ୍ଟ ରାଶିରେ ପରିଣତ କରାଗଲା)

$= 3 - 2\,(1.414) = 3 - 2.828 = 0.172$

ଉଦାହରଣ – 18 : $\sqrt{6} = 2.449$ ହେଲେ, $8\sqrt{\frac{3}{2}}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $8\sqrt{\frac{3}{2}} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{8 \times \sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{6}}{2}$ (ପରିମେୟ ହର ବିଶିଷ୍ଟ ରାଶିରେ ପରିଣତ କରାଗଲା)

$= 4\sqrt{6} = 4(2.449) = 9.796$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6 (c)

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) 0.36 ର ବର୍ଗମୂଳଟି ---- (6.0, 0.6, .06, .006)

(b) 1.21 ର ବର୍ଗମୂଳଟି ---- (0.11, 1.01, 1.1, 1.001)

(c) $1\frac{7}{9}$ ର ବର୍ଗମୂଳଟି ---- । $\left(1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{7}{3}\right)$

(d) 0.0009 ର ବର୍ଗମୂଳଟି ----- । (0.3, 0.03, 0.003, 0.0003)

(e) $6\frac{1}{4}$ ର ବର୍ଗମୂଳଟି ---- । $\left(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right)$

2. ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

289, 361, 784, 6.25, 12.96, 19.36 ଓ 10.24

3. ଭାଗକ୍ରିୟା ସାହାଯ୍ୟରେ ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

93025, 99856, 108241, 74529, 2256004, 1879641 ଓ 53361

4. ଦତ୍ତ ଦଶମିକ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

53.1441, 36.3609, 4.401604, 0.9801 ଓ 5.4756

5. ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳ ଆସନ୍ନ ଦଶମିକ **3** ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) 5, (ii) 7, (iii) 10, (iv) 2.5, (v) 3.6

6. ଦଶମିକ ତିନି ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନ ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$1\frac{1}{4}, 2\frac{7}{9}, 4\frac{1}{16}, 3\frac{7}{25}$ ଓ $4\frac{9}{16}$

7. (i) $\sqrt{2} = 1.414$ ହେଲେ $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $\sqrt{3} = 1.732$ ହେଲେ, $\frac{8}{3\sqrt{3}}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) $\sqrt{3} = 1.732$ ହେଲେ, $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) $\sqrt{6} = 2.449$ ହେଲେ, $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(v) $\sqrt{6} = 2.449$ ହେଲେ, $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6.10 ବର୍ଗମୂଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିବିଧ ପ୍ରଶ୍ନ :

ଉଦାହରଣ – 19 : 2352 କୁ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ?

ସମାଧାନ :

2	2352
2	1176
2	588
2	294
7	147
7	21
	3

$2352 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 3$

$= 2^2 \times 2^2 \times 7^2 \times 3$

2352 କୁ 3 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଭାଗଫଳ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ।

ଉଦାହରଣ – 20 : କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାର $\frac{1}{3}$ ଓ $\frac{1}{4}$ ର ଗୁଣଫଳ 108 ହେବ ?

ସମାଧାନ : ସଂଖ୍ୟାଟି x ଧରାଯାଉ । x ର $\frac{1}{3} = \frac{x}{3}$ ଏବଂ x ର $\frac{1}{4} = \frac{x}{4}$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $\frac{x}{3} \times \frac{x}{4} = \frac{x^2}{12} = 108$

$\therefore\ x^2 = 108 \times 12$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{108 \times 12} = \pm\sqrt{6 \times 6 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2}$

$= \pm(6 \times 3 \times 2) = \pm 36 \Rightarrow x = 36$ $\therefore$ ସଂଖ୍ୟାଟି 36

ଉଦାହରଣ – 21 : 34967 ରୁ କେଉଁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ସଂଖ୍ୟା ବିୟୋଗ କଲେ, ବିୟୋଗଫଳ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ?

ସମାଧାନ : ପ୍ରଥମେ 34967 ର ବର୍ଗମୂଳ ସ୍ଥିର କରିବା ।

1	$\overline{3}\ \overline{49}\ \overline{67}$	186
	(–)1	
28	2 49	
	(–) 2 24	
366	2567	
	(–) 2196	
	371	

ଉକ୍ତ ଭାଗକ୍ରିୟାରୁ ଜଣାଗଲା ଯେ, 34967, 186^2 ଠାରୁ 371 ଅଧିକ । ଏଣୁ ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାରୁ 371 ବିୟୋଗକଲେ, ବିୟୋଗଫଳ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ।

ଉଦାହରଣ – 22 : 4931 ରେ କେଉଁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗ କଲେ, ଯୋଗଫଳ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ?

ସମାଧାନ :

7	$\overline{49}\ \overline{31}$	70
	49	
140	31	
	0	
	31	

ଆମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଯେ, 70 ର ବର୍ଗ 4931 ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର, ମାତ୍ର 71 ର ବର୍ଗ, 4931 ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।
$\therefore$ 4931 ରେ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗ କଲେ ଯୋଗଫଳ ଯେଉଁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେବ, ତାହା ହେଲା $71^2 - 4931 = 5041 - 4931 = 110$ । ତେଣୁ 4931 ସହ 110 ଯୋଗ କଲେ, ଯୋଗଫଳ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେବ । $\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ସଂଖ୍ୟା = 110

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6(d)

1. 1000 ର ନିକଟତମ କେଉଁ ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ?
2. ଗୋଟିଏ ସ୍କୁଲ୍‌ରେ ଯେତେ ଜଣ ଛାତ୍ର ଥିଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେତୋଟି ଲେଖାଏଁ 50 ପଇଶି ଦେବାରୁ ମୋଟ 1250 ଟଙ୍କା ଚାନ୍ଦା ଅସୁଲ ହେଲା । ସ୍କୁଲ୍‌ର ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?
3. ଏକ ଉଚ୍ଚ ଇଂରାଜୀ ସ୍କୁଲ୍‌ର ଛାତ୍ରମାନଙ୍କୁ ବର୍ଗାକାର ନକ୍ସାରେ ଠିଆ କରାଇବାରୁ 10 ରୁ କମ୍ ଛାତ୍ର ବଳି ପଡ଼ିଲେ । ସ୍କୁଲ୍‌ର ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା 1230 ଜଣ ହେଲେ ପ୍ରତି ଧାଡ଼ିରେ କେତେ ଜଣ ଛାତ୍ର ଛିଡ଼ା ହୋଇଥିଲେ ?
4. 6912କୁ କେଉଁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଭାଗ ବା ଗୁଣନ କଲେ ଫଳ ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ?
5. କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାର $\frac{2}{3}$ ଓ $\frac{7}{8}$ ର ଗୁଣଫଳ 1344 ଅଟେ ?
6. ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥର 3 ଗୁଣ । ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 972 ବର୍ଗମିଟର ହେଲେ ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
7. ଗୋଟିଏ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପ୍ରସ୍ଥର ଦେଢ଼ଗୁଣ । ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 1350 ବର୍ଗମିଟର ହେଲେ ଏହାର ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
8. ଜଣେ ଲୋକ ତାହାର 400 ଓ 441 ବର୍ଗମିଟରର ଦୁଇଟି ବର୍ଗାକାର ଜମି ବଦଳରେ ଗୋଟିଏ ବର୍ଗାକାର ଜମି କିଣିଲା । ଏଥିରେ ତାର ବାଡ଼ ଦେବା ଖର୍ଚ୍ଚ ମିଟର ପ୍ରତି 5 ଟଙ୍କା ହିସାବରେ କେତେ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ ?
9. ଗୋଟିଏ ଛାତ୍ରାବାସରେ ଯେତେ ଜଣ ଛାତ୍ର ଥିଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକେ, ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟାର 5 ଗୁଣ ଲେଖାଏଁ ଟଙ୍କା ମେସ୍ ଖର୍ଚ୍ଚ ଦେବାରୁ ମୋଟ 72000 ଟଙ୍କା ଅସୁଲ ହେଲା । ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
10. 18265 ରୁ କେଉଁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ସଂଖ୍ୟା ବିୟୋଗ କଲେ ବିୟୋଫଳ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ?
11. 4515600 ରେ କେଉଁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗ କଲେ, ଯୋଗଫଳ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ?
12. ଗୋଟିଏ ବର୍ଗାକାର ପଡ଼ିଆର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 133.6336 ବ.ମି. ହେଲେ ପଡ଼ିଆର ପରିସୀମା କେତେ ?

6.11 ସଂଖ୍ୟାର ଘନ ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣ ଘନ ସଂଖ୍ୟା (Cube of a number and a perfect cube number):

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ – $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ ଆମେ କହୁ, '2 ର ଘନ = 8' ;

$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$ ଆମେ କହୁ, '3 ର ଘନ = 27' ;

$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ ଆମେ କହୁ, '4 ର ଘନ = 64' ....ଇତ୍ୟାଦି ।

ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସାରଣୀର ପ୍ରଥମ ଦଶଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ ଦିଆଯାଇଛି ।

ସାରଣୀ - 6.3

ସଂଖ୍ୟା	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ଘନ	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

1, 8, 27, 64... ଆଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପୂର୍ଣ୍ଣ ଘନ ସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, $n \times n \times n = n^3$ ମଧ୍ୟ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାକୁ (n^3କୁ) ଏକ ଘନ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

1, 3, 5, 7 .. ଆଦି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ 2, 4, 6, 8 ... ଆଦି ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା । (ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

(ନିଜେ କର)

ନିମ୍ନ ସଂରଚନାକୁ ଦେଖି କୁହ –

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$ ଇତ୍ୟାଦି ।

10^3 ପାଇବା ପାଇଁ କେତେଗୋଟି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ନେବାକୁ ପଡ଼ିବ ?

କୌଣସି ଏକ ସଂଖ୍ୟା ଘନ ସଂଖ୍ୟା କି ନୁହେଁ, ତାହା ଆମେ ସଂଖ୍ୟାଟିର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣରୁ ଜାଣିପାରିବା ।

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଉଦାହରଣ – 23 : 128 ଏକ ଘନ ସଂଖ୍ୟା କି ?

ସମାଧାନ : $128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ....(1)

$= (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times 2$

$= (2)^3 \times (2)^3 \times 2 = (2 \times 2)^3 \times 2 = (4)^3 \times 2$

128ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ n^3 ରୂପରେ ପ୍ରକାଶିତ ହେଲା ନାହିଁ । ଏଣୁ ଏହା ଏକ ଘନ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

ଟୀକା : (1) ଚିହ୍ନିତ ସୋପାନରେ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣରେ 7 ଗୋଟି 2 ଗୁଣନୀୟକ ରୂପେ ରହିଲା । 6 ଗୋଟି 2 ରୁ 4^3 ମିଳିଲା ଓ ଗୋଟିଏ 2 (ଗୁଣନୀୟକ) ବଳକା ରହିବାରୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ n^3 ରୂପରେ ପ୍ରକାଶିତ ହେଲା ନାହିଁ । ଏଣୁ ଦେଖିଲେ ଯେ ସୋପାନ (1)ରେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମୌଳିକ ଉତ୍ପାଦକ ସଂଖ୍ୟା 3 ର ଗୁଣିତକ ହେଲେ ହିଁ ସଂଖ୍ୟାଟି ଘନ ସଂଖ୍ୟା ହେବ । ପ୍ରଶ୍ନ ସମାଧାନ କଲାବେଳେ ଆମେ ସମାଧାନର ସୋପାନକୁ ନିମ୍ନମତେ ଦର୍ଶାଇଲେ ଯଥେଷ୍ଟ ହେବ ।

$128 = \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{2 \times 2 \times 2} \times 2$ $\therefore$ 128 ଘନ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

6.11.1 ଘନସଂଖ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସୂତ୍ର :

ଆମେ ପଢ଼ିଥିବା ଗୋଟିଏ ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ ହେଲା –

$(a \times b)^n = a^n \times b^n$ ଯେଉଁଠି $a, b \in Q$ ଓ $n \in N$

ଏହାର ଗୋଟିଏ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ ହେଲା– ସୂତ୍ର : **$a^3 \times b^3 = (a \times b)^3$ ଯଦି $a, b \in N$ .... (1)**

ଉଦାହରଣ – 24 : 27000 ଏକ ଘନ ସଂଖ୍ୟା କି ନୁହେଁ, ପରୀକ୍ଷା କର । ଯଦି ସଂଖ୍ୟାଟି ଘନସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ ଏହା କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $27000 = \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{3 \times 3 \times 3} \times \overline{5 \times 5 \times 5} = 2^3 \times 3^3 \times 5^3 = (2 \times 3 \times 5)^3 = (30)^3$

$\therefore$ 27000 ଏକ ଘନ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଏହା 30 ର ଘନ ।

ଉଦାହରଣ – 25 : 392 କୁ କେଉଁ ସର୍ବନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଗୁଣିଲେ, ଗୁଣଫଳ ଏକ ଘନସଂଖ୍ୟା ହେବ ?

ସମାଧାନ : $392 = \overline{2 \times 2 \times 2} \times 7 \times 7 = 2^3 \times 7^2$

$\therefore$ 392 ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣରେ – ଗୁଣନୀୟକ 2 ର ସଂଖ୍ୟା = 3 ଓ ଗୁଣନୀୟକ 7 ର ସଂଖ୍ୟା = 2

$\therefore$ 392 କୁ ଅନ୍ୟୂନ 7 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣିଲେ, ଗୁଣଫଳ ଏକ ଘନ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ।

ଉଦାହରଣ–26 : ଏକ ସମଘନାକାର ବାକ୍ସର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧାରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4 ମିଟର ହେଲେ, ଏହାର ଆୟତନ କେତେ ?

ସମାଧାନ : ସମଘନାକାର ବାକ୍ସର ଆୟତନ = (ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ)^3

$= (4)^3$ ଘ.ମି. $= (4 \times 4 \times 4)$ ଘ.ମି. = 64 ଘ.ମି.

ମେଟ୍ରିକ୍ ମାପ ତାଲିକା :

ଘନଫଳ ମାପର ମେଟ୍ରିକ୍ ଏକକ ତାଲିକା ତଳେ ଦେଖ : ।

10 ମି.ମି. = 1 ସେ.ମି. ହେତୁ, 1000 ଘ.ମି.ମି. = 1 ଘ. ସେ.ମି.

10 ସେ.ମି. = 1 ଡେସି.ମି. ହେତୁ, 1000 ଘ.ସେ.ମି. = 1 ଘ. ଡେସି.ମି.

10 ଡେସି.ମି. = 1 ମି. ହେତୁ, 1000 ଘ.ଡେସି.ମି. = 1 ଘ.ମି.

ମନେରଖ :

(କ) ଗୋଟିଏ ପାତ୍ରର ଆୟତନ ଯେତେ ଘନ ଡେସି ମିଟର, ସେଥିରେ ଧରୁଥିବା ଜଳର ପରିମାଣ ସେତିକି ଲିଟର ।
ଅର୍ଥାତ୍ 1 ଘ.ଡେସି.ମି. = 1000 ଘ.ସେ.ମି. = 1 ଲିଟର
(ଲିଟର ହେଉଛି ତରଳ ପଦାର୍ଥ ଲାଗି ମାପ ଏକକ)

(ଖ) ଗୋଟିଏ ପାତ୍ରର ଆୟତନ ଯେତେ ଘନ ମିଟର, ସେଥିରେ ଧରୁଥିବା ଜଳର ପରିମାଣ ସେତିକି କିଲୋଲିଟର (ବା 1000 ଲିଟର) ।

ଉଦାହରଣ– 27: ଏକ ସମଘନାକାର ପାଣି ଟାଙ୍କି ଭିତର ପାଖର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2 ମିଟର ହେଲେ, ଏଥିରେ କେତେ ଲିଟର ପାଣି ଧରେ ?

ସମାଧାନ : ପାଣି ଟାଙ୍କିର ଆୟତନ = (ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧାରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ)^3

$= 2^3$ ଘନ ମିଟର = 8 ଘନ ମିଟର

$\therefore$ ପାଣିର ପରିମାଣ = 8 କିଲୋଲିଟର = 8000 ଲିଟର ।

1729 ଏକ ସଂଖ୍ୟା, ଯାହା ଦୁଇଟି ଉପାୟରେ ଦୁଇଟି ଘନସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ରୂପେ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇପାରିବ । ଯଥା : $1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$ ଏହାକୁ Hardy-Ramanujan ସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି $4104 = 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$ ଏବଂ $13832 = 18^3 + 20^3 = 2^3 + 24^3$। ଏଭଳି ଆମେ ଅସଂଖ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇବା । ଏଥିମଧ୍ୟରୁ 1729 କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ– 6 (e)

1. 11 ଠାରୁ 20 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $(3)^3 \times (4)^3 = (........)^3$ (ii) $(5)^3 \times (11)^3 = (........)^3$

(iii) $(12)^3 \times (5)^3 = (........)^3$ (iv) $6^3 = 2^3 \times (........)^3$

(v) $15^3 = (........)^3 \times (5)^3$

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ଘନ ସଂଖ୍ୟା ?

54, 216, 243, 218, 1331, 106480

4. 675 ରେ ଅନ୍ୟୂନ କେତେ ଗୁଣିଲେ, ଗୁଣଫଳ ଏକ ଘନସଂଖ୍ୟା ହେବ ?

5. 8640 କୁ ଅତି କମ୍‌ରେ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, ଭାଗଫଳ ଏକ ଘନସଂଖ୍ୟା ହେବ ?

6. ଏକ ସମଘନର ଏକ ଧାରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 15 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର ଆୟତନ କେତେ ?

7. ଗୋଟିଏ ସମଘନାକାର ପାଣି ଟାଙ୍କିର ଗଭୀରତା 2 ମିଟର । ଏଥିରୁ ଦୈନିକ 1000 ଲିଟର ପାଣି କାଢ଼ି ନିଆଗଲେ, କେତେ ଦିନରେ ପାଣିତକ ଶେଷ ହୋଇଯିବ ?

8. 12 ମିଟର ଗଭୀର ଏକ ସମଘନାକାର ଗାତ ଖୋଳିବାକୁ ଘନ ମିଟରକୁ 25 ଟଙ୍କା ହିସାବରେ କେତେ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ ?

9. 3 ର ଗୁଣିତକ ଯେକୌଣସି ପାଞ୍ଚଗୋଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, 3 ର ଗୁଣିତକ ଯେକୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ, 27 ର ଏକ ଗୁଣିତକ ଅଟେ ।

10. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ।

6.12. ଘନମୂଳ (Cube root) :

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ 1, 8, 27, 64... ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଘନସଂଖ୍ୟା, ଅର୍ଥାତ୍ $1 = 1^3$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$ ଏବଂ $64 = 4^3$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ଆମେ 1, 8, 27... ଆଦି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଯଥାକ୍ରମେ 1, 2, 3... ଆଦି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ ବୋଲି କହିଥାଉ ।

ଅପରପକ୍ଷରେ ଆମେ 1, 2, 3,4.... ଆଦି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଯଥାକ୍ରମେ 1, 8, 27, 64... ର ଘନମୂଳ ବୋଲି କହିଥାଉ ।

ସଂଜ୍ଞା : (ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାରେ)

m ଓ n ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $n = m^3$ ହେଲେ, 'm' କୁ 'n'ର ଘନମୂଳ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ତଳେ ସାରଣୀରେ ପ୍ରଥମ ଦଶଟି ଧନାତ୍ମକ ଘନସଂଖ୍ୟାର ଘନମୂଳ ଦିଆଯାଇଛି ।

ସାରଣୀ - 6.4

ଘନସଂଖ୍ୟା (n)	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
n ର ଘନମୂଳ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

ଘନମୂଳ ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ହେଉଥିବା ଚିହ୍ନଟି ହେଲା $\sqrt[3]{\ldots\ldots}$ ଯଥା: $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$ ଇତ୍ୟାଦି ।

6.12.1 ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପ୍ରଣାଳୀ :

ନିମ୍ନଲିଖିତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (ଘନସଂଖ୍ୟା) ଗୁଡ଼ିକର ଘନମୂଳ କିପରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇଛି, ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

(a) $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3$

$\therefore \sqrt[3]{216} = 2 \times 3 = 6$

(b) $1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 2^3 \times 2^3 \times 3^3 = (2 \times 2 \times 3)^3 = (12)^3$

$\therefore \sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$

(c) $1157625 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7 = 3^3 \times 5^3 \times 7^3$

$\therefore \sqrt[3]{1157625} = 3 \times 5 \times 7 = 105$

ଉଦାହରଣ– **28 :** (i) 2744 ଓ (ii) 10,000 ର ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (i) $2744 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 7 \times 7 = 2^3 \times 7^3 = (2 \times 7)^3$

$\therefore \sqrt[3]{2744} = 2 \times 7 = 14$

(ii) $10{,}00{,}000 = 10^3 \times 10^3$

$\therefore \sqrt[3]{10{,}00{,}000} = 10 \times 10 = 100$

ଉଦାହରଣ– 29 : 26244 କୁ କେଉଁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, ଭାଗଫଳ ଏକ ଘନସଂଖ୍ୟା ହେବ ? ଉକ୍ତ ଭାଗଫଳର ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $26244 = 2 \times 2 \times \overline{3 \times 3 \times 3} \times \overline{3 \times 3 \times 3} \times 3 \times 3 = 3^3 \times 3^3 \times 3^2 \times 2^2$

$2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ 36 ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ $3^3 \times 3^3$ ହେବ ଓ ଏହା ଏକ ଘନ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ । ଏହାର ଘନମୂଳ ହେବ $3 \times 3 = 9$

ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣଘନ ସଂଖ୍ୟାର ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟର ଏକ ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ :

857 375 ର ଘନମୂଳ ସ୍ଥିର କରିବା –

ସୋପାନ – 1 : $\overline{857}\ \overline{375}$ ସଂଖ୍ୟାର ଡାହାଣପଟୁ ତିନୋଟି ଲେଖାଏଁ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ପୁଞ୍ଜି (ଗ୍ରୁପ୍) ଗଠନ କର ।

ସୋପାନ – 2 : ପ୍ରଥମ ଗ୍ରୁପ୍ ($\overline{375}$)ରୁ ଆମେ ଘନମୂଳର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ ପାଇବା । ଗ୍ରୁପ୍‌ର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ 5 ହେତୁ ଘନମୂଳର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ 5 ହେବ ।

ସୋପାନ – 3 : ବର୍ତ୍ତମାନ ଦ୍ୱିତୀୟ ଗ୍ରୁପ୍ '857' କୁ ନେବା ।

ଆମେ ଜାଣିଛେ, $9^3 = 729$ ଏବଂ $10^3 = 1000$ ଏବଂ $729 < 857 < 1000$

ସୋପାନ – 4 : ବର୍ତ୍ତମାନ 729 ର ଘନମୂଳ 9 ହେତୁ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହେବାକୁ ଥିବା ଘନମୂଳର ଦଶକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ 9 ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ 857375 ର ଘନମୂଳ 95 ହେବ । $\therefore \sqrt[3]{857375} = 95$

(ନିଜେ କର) ଉପରୋକ୍ତ ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନରେ ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 17576, (ii) 12167, (iii) 32768 ଏବଂ (iv) 4913

ଅନୁଶୀଳନୀ– 6 (f)

1. **ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :** (i) 343 (ii) 1000 (iii) 74088 (iv) 157464 (v) 8,000,000
2. 2744 କୁ କେଉଁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ସଂଖ୍ୟାରେ ଗୁଣିଲେ, ଗୁଣଫଳ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ଘନସଂଖ୍ୟା ହେବ ? ଉକ୍ତ ଘନସଂଖ୍ୟାର ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
3. 5488 କୁ କେଉଁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, ଭାଗଫଳ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ଘନସଂଖ୍ୟା ହେବ ? ଉକ୍ତ ଭାଗଫଳର ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
4. ଏକ ସମଘନର ଆୟତନ 512 ଘନମିଟର ହେଲେ, ଏହାର ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କେତେ ହେବ ?
5. 53240 କୁ କେଉଁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ସଂଖ୍ୟାରେ ଭାଗ କଲେ, ଭାଗଫଳ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ଘନସଂଖ୍ୟା ହେବ ଏବଂ କେଉଁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଗୁଣିଲେ ଗୁଣଫଳ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ଘନସଂଖ୍ୟାହେବ ?

6.12.2 ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ଘନ ଓ ଘନମୂଳ :

$-1, -2, -3, ...$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା । ଏଗୁଡ଼ିକର ଘନ ହେଲା –

$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$, $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ ଏବଂ

$(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$

ସେହିପରି $(-4)^3 = -64$, $(-5)^3 = -125$, $(-6)^3 = -216$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ, ଏକ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ଘନ, ଏକ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ।

$-1, -8, -27$ .... ଇତ୍ୟାଦି ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଘନସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଏଗୁଡ଼ିକର ଘନମୂଳ ଯଥାକ୍ରମେ $-1, -2, -3$, ... ଇତ୍ୟାଦି ।

ସଂଜ୍ଞା : m ଓ n ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଓ $n = m^3$ ହେଲେ, m କୁ n ର ଘନମୂଳ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ଟୀକା : $(2)^2 = 4$ ଓ $(-2)^2 = 4$ ତେଣୁ ଆମେ କହିଥିଲେ, 4 ର ଦୁଇଗୋଟି ବର୍ଗମୂଳ ଅଛି ଏବଂ ସେହି ଅନୁଶୀଳନୀରେ ଆମେ କହିଥିଲେ – ପ୍ରତ୍ୟେକ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାର ଦୁଇଗୋଟି ବର୍ଗମୂଳ ଅଛି,

ବର୍ତ୍ତମାନ ଦେଖାଯାଉ – $(2)^3 = 8$

ଏଣୁ 8ର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଘନମୂଳ (ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାରେ) ଅଛି ଓ ତାହା ହେଲା 2 ।

ସେହିଭଳି ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଘନସଂଖ୍ୟାର ଗୋଟଏ ମାତ୍ର ବାସ୍ତବ ଘନମୂଳ ଅଛି ।

ବି.ଦ୍ର. : ପରେ ଜାଣିବ ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଘନସଂଖ୍ୟାର ମୋଟରେ ତିନିଗୋଟି ଘନମୂଳ ଥାଏ ଓ ସେଥିମଧ୍ୟରୁ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ତୁମେ ଜାଣିଥିବା ସଂଖ୍ୟା ସମୂହର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।

ଉଦାହରଣ– 30 : (-15) ର ଘନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $(-15)^3 = (-15) \times (-15) \times (-15) = -3375$

ଉଦାହରଣ– 31 : (-1331) ର ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଉତ୍ପାଦୀକରଣ ଦର୍ଶାଇଲେ $1331 = 11 \times 11 \times 11$

$\therefore -1331 = (-11) \times (-11) \times (-11) = (-11)^3$

$\sqrt[3]{-1331} = -11$

6.12.3 ଘନମୂଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ସୂତ୍ର :

ଉଦାହରଣ– 32 : $\sqrt[3]{27 \times 64}$ ଏବଂ $\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{64}$ ମଧ୍ୟରେ କି ସମ୍ପର୍କ ଅଛି ?

ସମାଧାନ : $27 \times 64 = 3 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4$

$= (3 \times 4)\ (3 \times 4)\ (3 \times 4) = 12^3$

$\sqrt[3]{27 \times 64} = \sqrt[3]{(12)^3} = 12$

ପୁନଶ୍ଚ $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3} = 3$ ଏବଂ $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4 \times 4 \times 4} = 4$

$\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{64} = 3 \times 4 = 12$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମ୍ପର୍କ $\sqrt[3]{27 \times 64} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{64}$

ଉଦାହରଣ– 33 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ,

(a) $\sqrt[3]{(-125) \times 216} = \sqrt[3]{(-215)} \times \sqrt[3]{216}$

(b) $\sqrt[3]{27 \times (-2744)} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{-2744}$

(c) $\sqrt[3]{(-125) \times (-1000)} = \sqrt[3]{-125} \times \sqrt[3]{-1000}$

ସମାଧାନ :

(a) $-125 \times 216 = -(125 \times 216) = -(5 \times 5 \times 5 \times 6 \times 6 \times 6)$

$= -(5 \times 6) \times (5 \times 6) \times (5 \times 6) = -(30) \times (30) \times (30)$

$= -(30)^3 = (-30)^3$ [ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ ମଧ୍ୟ ଋଣାତ୍ମକ]

$\therefore \sqrt[3]{(-125) \times 216} = \sqrt[3]{(-30)^3} = -30$

ପୁନଶ୍ଚ, $\sqrt[3]{(-215)} \times \sqrt[3]{216}$

$= \sqrt[3]{(-5) \times (-5) \times (-5)} \times \sqrt[3]{6 \times 6 \times 6} = (-5) \times 6 = -30$

$\therefore \sqrt[3]{(-125) \times 216} = \sqrt[3]{(-125)} \times \sqrt[3]{216}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(b) $27 \times -2744 = -(27 \times 2744) = -(3 \times 3 \times 3 \times 14 \times 14 \times 14)$

$= -(3 \times 14) \times (3 \times 14) \times (3 \times 14) = -(42) \times (42) \times (42)$

$= -(42)^3 = (-42)^3$

$\therefore \sqrt[3]{27 \times (-2744)} = \sqrt[3]{(-42)^3} = -42$

ପୁନଶ୍ଚ, $\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{-2744}$

$= \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3} \times \sqrt[3]{(-14) \times (-14) \times (-14)} = 3\ (-14) = -42$

$\therefore \sqrt[3]{27 \times (-2744)} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{-2744}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(c) $(-125) \times (-1000) = 125 \times 1000$

$= 5 \times 5 \times 5 \times 10 \times 10 \times 10 = (5 \times 10) \times (5 \times 10) \times (5 \times 10)$

$= 50 \times 50 \times 50 = (50)^3$ $\therefore \sqrt[3]{(-125) \times (-1000)} = \sqrt[3]{(50)^3} = 50$

ପୁନଶ୍ଚ, $\sqrt[3]{(-125)} = \sqrt[3]{(-5) \times (-5) \times (-5)} = -5$ ଏବଂ $\sqrt[3]{-1000} = \sqrt[3]{(-10) \times (-10) \times (-10)} = -10$

$\sqrt[3]{(-125)} \times \sqrt[3]{-1000} = (-5) \times (-10) = 50$

$\therefore \sqrt[3]{(-125) \times (-1000)} = \sqrt[3]{-125} \times \sqrt[3]{-1000}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପରିସ୍ଥ ଉଦାହରଣମାନଙ୍କରୁ ଦେଖିଲେ ଯେ -

ସୂତ୍ର : ଯଦି a ଓ b ଉଭୟେ ଘନସଂଖ୍ୟା ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ $\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$

ଉଦାହରଣ- 34 : ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $\sqrt[3]{16 \times 32}$ (ii) $\sqrt[3]{(-12) \times 18}$

ସମାଧାନ : (i) $\sqrt[3]{16 \times 32} = \sqrt[3]{2^4 \times 2^5} = \sqrt[3]{2^9} = 2^3 = 8$

(ii) $\sqrt[3]{(-12) \times 18} = \sqrt[3]{-(2 \times 2 \times 3) \times 2 \times 3 \times 3} = \sqrt[3]{-(2 \times 3)^3} = (-2 \times 3) = -6$

ସୂତ୍ର : ଯଦି a, b, c ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $ab = c^3$ ହୁଏ, ତେବେ, $\sqrt[3]{ab} = c$

ଅନୁଶୀଳନୀ- 6 (g)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

$-1, \quad -125, \quad -5832, \quad -17576, \quad -2744000$

ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । (2 ନଂ ପ୍ରଶ୍ନରୁ 11 ନଂ ପ୍ରଶ୍ନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ)

2. 8×64 **3.** $(-216) \times (1728)$ **4.** $343 \times (-512)$

5. $(-125) \times (-3375)$ **6.** 729×15625 **7.** -456533

8. 216000 **9.** 28×98 **10.** $(-27) \times 27$ **11.** $(-24) \times (-72)$

12. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ଘନସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ? ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକ ଘନସଂଖ୍ୟା ଅଟନ୍ତି ସେହିଗୁଡ଼ିକର ଘନମୂଳ ସ୍ଥିର କର ।

$-64, -1056, \quad -1728, \quad -2197, \quad -3888$

13. ସରଳ କର :

(i) $\sqrt[3]{-216 \times 125}$ (ii) $\sqrt[3]{-512 \times 729}$ (iii) $\sqrt[3]{-1728 \times 15625}$ (iv) $\sqrt[3]{-1000 \times 512}$

6.13 ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ p ଓ q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $q \neq 0$ ହେଲେ, $\frac{p}{q}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବ । ଯଥା : $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, -\frac{5}{11}$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ଉଦାହରଣ- 35 : ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{-5}{11}\right)^3$ (iii) $(0.04)^3$

ସମାଧାନ : (i) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$

(ii) $\left(\frac{-5}{11}\right)^3 = \left(\frac{-5}{11}\right) \times \left(\frac{-5}{11}\right) \times \left(\frac{-5}{11}\right) = \frac{(-5) \times (-5) \times (-5)}{11 \times 11 \times 11} = \frac{(-5)^3}{11^3} = \frac{-125}{1331}$ (ଉତ୍ତର)

(iii) $(0.04)^3 = 0.04 \times 0.04 \times 0.04$

$= \frac{4}{100} \times \frac{4}{100} \times \frac{4}{100} = \frac{64}{1000000} = 0.000064$ (ଉତ୍ତର)

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ ମୂଳ ସଂଖ୍ୟାରେ ଦୁଇଟି ଦଶମିକ ସ୍ଥାନ ଥିବା ସ୍ଥଳେ ତାହାର ଘନରେ 6 ଗୋଟି ଦଶମିକ ସ୍ଥାନ ରହିଛି ।

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ଗୁଣନର ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ – ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ ମଧ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

ପୁନଶ୍ଚ $p, q \in Z$ ଏବଂ $q \neq 0$ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\left(\frac{p}{q}\right)^3 = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$ (ଘାତ ରାଶିର ସଂଜ୍ଞା)

$\frac{p \times p \times p}{q \times q \times q} = \frac{p^3}{q^3}$ (ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାରେ ଗୁଣନ ସଂଜ୍ଞା)

ତେଣୁ ଆମେ ପାଇଲେ – ସୂତ୍ର : $p, q \in Z$ ଏବଂ $q \neq 0$ ହେଲେ $\left(\frac{p}{q}\right)^3 = \frac{p^3}{q^3}$

6.14 ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, $\frac{27}{64} = \frac{3^3}{4^3} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$ ତେଣୁ $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$

ଏଠାରେ, $\frac{3}{4}$ କୁ $\frac{27}{64}$ ର ଘନମୂଳ କୁହାଯାଏ ।

ସେହିପରି $\frac{-125}{1331} = \left(\frac{-5}{11}\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{-125}{1331}} = \frac{-5}{11}$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : (i) ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲାବେଳେ ଲବର ଘନମୂଳକୁ ଲବ ରୂପେ ଓ ହରର ଘନମୂଳକୁ ହର ରୂପେ ନେଇ ଦତ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରୁ ।

(ii) ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ଋଣାତ୍ମକ ହେଲେ, ଘନମୂଳଟି ଋଣାତ୍ମକ ହେବ ।

(iii) ଉଦାହରଣରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ଯେଉଁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଲବ ଓ ହର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଘନସଂଖ୍ୟା ସେହି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ହିଁ ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ ।

ଏଣୁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସୂତ୍ରଟିକୁ ମନେରଖ :

ସୂତ୍ର : $p, q \in Z$, ଓ $q \neq 0$ କ୍ଷେତ୍ରରେ $p = m^3$ $q = n^3$ ତେବେ $\sqrt[3]{\frac{p}{q}} = \frac{m}{n}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6(h)

1. ଘନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\frac{7}{9}$ (ii) $-\frac{8}{11}$ (iii) $\frac{12}{7}$ (iv) $-\frac{13}{8}$ (v) $2\frac{3}{5}$

(vi) $3\frac{1}{4}$ (vii) $-1\frac{2}{3}$ (viii) 0.2 (ix) 1.3 (x) 0.03

2. ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $\frac{8}{125}$ (ii) $\frac{-64}{1331}$ (iii) $\frac{-27}{4096}$ (iv) $\frac{2197}{9261}$

(v) 0.001 (vi) 0.008, (vii) 1.728 (viii) 0.000125

3. ନିମ୍ନୋକ୍ତ କେଉଁ ରାଶି କୌଣସି ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଘନ ଅଟେ ?

(i) $\frac{27}{64}$ (ii) $\frac{125}{128}$ (iii) $\frac{-216}{729}$ (iv) $\frac{-250}{686}$

(v) 0.8 (vi) 0.125 (vii) 0.1331

*****

ସମୀକରଣ ଓ ଏହାର ସମାଧାନ
(EQUATION AND IT'S SOLUTION)

ଅଧ୍ୟାୟ 7

7.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

''ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଓ ଅଭେଦ'' – ଅଧ୍ୟାୟରେ ତୁମେମାନେ 'ଅଭେଦ' କ'ଣ ଏବଂ ଏହା କିପରି ଗୋଟିଏ ସମୀକରଣଠାରୁ ଭିନ୍ନ ତାହା ତୁମେମାନେ ଜାଣିଛ । ପୂର୍ବଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ତୁମେ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ସମୀକରଣର ସୃଷ୍ଟି ଏବଂ ଏହାର ସମାଧାନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ମଧ୍ୟ କିଛି ଜାଣିଛ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ପୂର୍ବ ଆଲୋଚନା ସହ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ଆଲୋଚନା କରାଯିବ । ପୂର୍ବ ଅଧ୍ୟାୟରେ ପଢ଼ାଯାଇଥିବା ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣର ଆଧାରରେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ମଧ୍ୟ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ ।

7.2 ସମୀକରଣ ଓ ଅଭେଦ (Equation and Identity) :

ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ $5x - 2$ ଓ $2x+1$ କୁ ନିଆଯାଇ ଏକ ଉକ୍ତି $5x - 2 = 2x + 1$ (ଏଠାରେ x ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି) ସୃଷ୍ଟି କରାଯାଉ । ବର୍ତ୍ତମାନ x ସ୍ଥାନରେ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ଉପରୋକ୍ତ ଉକ୍ତିଟିର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କରିବା ।

$x = 1$ ନେଇ ଉକ୍ତିଟିର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କରିବା ।

ବାମପକ୍ଷ $= 5x - 2 = 5 \times 1 - 2 = 5 - 2 = 3$ ଓ ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ $= 2x + 1 = 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 = 3$

$\therefore 5x - 2 = 2x + 1$ ଉକ୍ତିଟି $x = 1$ ପାଇଁ ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

$x = 2$ ହେଲେ ବାମପକ୍ଷ $= 5x - 2 = 5 \times 2 - 2 = 10 - 2 = 8$

ଓ ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ $= 2x + 1 = 2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$

ତେଣୁ $x = 2$ ହେଲେ $5x - 2 = 2x + 1$ ଉକ୍ତିଟି ଅସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ସେହିପରି $x = 0, -1, 3$ ହେଲେ ଦତ୍ତ ଉକ୍ତି ମଧ୍ୟ ଅସତ୍ୟ ହେବ । ଏହା ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

ଉପରୋକ୍ତ ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷଣରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ସ୍ଥାନରେ "1" ନେଲେ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ହେଉଛି । କିନ୍ତୁ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ମାନ ପାଇଁ ଏହା ସତ୍ୟ ନୁହେଁ ।

ଏଠାରେ $5x - 2 = 2x + 1$ ଉକ୍ତିଟିକୁ ଏକ **ସମୀକରଣ (Equation)** କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ x ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ।

ଟୀକା : ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକରେ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି କିମ୍ବା ଏକାଧିକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ଥାଇପାରେ । ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିଗୁଡ଼ିକୁ ସାଧାରଣତଃ x, y, z ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଇଥାଏ ।

ମନେକର ଗୋଟିଏ ଉକ୍ତିରେ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି 'x' ବିଦ୍ୟମାନ । ଯଦି ଉକ୍ତିଟି ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଇଁ ସତ୍ୟ, ତେବେ ତାକୁ ଏକ **ଅଭେଦ (Identity)** କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $3x + 2x = 5x$, $(4x+2) - 2x = 2(x+1)$ ଇତ୍ୟାଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଅଭେଦ ।

7.3 ସମୀକରଣର ଘାତ (Power of an equation) :

ସମୀକରଣର ପଦଗୁଡ଼ିକରେ ଥିବା ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତକୁ ସମୀକରଣର ଘାତ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ : $5x = 10$, $2x + 1 = -3$ ହେଉଛି ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ, ସେହିପରି $x^2 = 36$, $2x^2 + 3x - 5 = 0$ ଆଦି ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣ ଅଟନ୍ତି ।

7.4 ସମୀକରଣର ବୀଜ (Roots of an equation) :

ସମୀକରଣ ଥିବା ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ଯେଉଁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମାନଗୁଡ଼ିକ ପାଇଁ ସମୀକରଣଟି ସତ୍ୟ, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ବୀଜ କୁହାଯାଏ ।

$2x = 6$ ସମୀକରଣର ବୀଜ "3" କାରଣ x ର ମାନ 3 ପାଇଁ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ।

ସମୀକରଣର ବୀଜନିର୍ଣ୍ଣୟ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କୁହାଯାଏ ।

ମନେରଖ : ସମୀକରଣର ଘାତ ସଂଖ୍ୟା ତା'ର ବୀଜ ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମାନ ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ n ଘାତୀ ସମୀକରଣର ବୀଜ ସଂଖ୍ୟା n ।

ସୁତରାଂ ଗୋଟିଏ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ବୀଜ ସଂଖ୍ୟା "1" । ସେହିପରି ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣର ବୀଜ ସଂଖ୍ୟା "2" ଇତ୍ୟାଦି ।

7.5 ଏକ ଅଜ୍ଞାତରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ (Solution of a Linear equation in one variable) :

ନିମ୍ନରେ କେତେକ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଉଦାହରଣ ଦିଆଗଲା ।

(a) $x + 3 = 4$ (b) $2(x - 1) = 10$ (c) $\frac{x-5}{2} - 1 = \frac{2x-1}{7}$

ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ସାଧାରଣ ରୂପ ହେଉଛି $ax + b = 0$ ଯେଉଁଠାରେ $(a \neq 0)$

a ରାଶିଟି x ର ସହଗ ଓ b ହେଉଛି ଏକ ଧ୍ରୁବ ରାଶି ।

ସମୀକରଣ ସମାଧାନ ନିମିତ୍ତ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ସ୍ୱତଃସିଦ୍ଧ :

(a) ସମାନ ସମାନ ରାଶି ସହ ସମାନ ସମାନ ରାଶି ଯୋଗ କଲେ ଯୋଗଫଳ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସମାନ ହେବେ ।

(b) ସମାନ ସମାନ ରାଶିରୁ ସମାନ ସମାନ ରାଶି ବା ଏକରାଶି ବିୟୋଗ କଲେ ବିୟୋଗଫଳଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସମାନ ହେବେ ।

(c) ସମାନ ସମାନ ରାଶିକୁ ସମାନ ସମାନ ରାଶି ବା ଏକ ରାଶି ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ ଗୁଣଫଳ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସମାନ ହେବେ ।

(d) ସମାନ ସମାନ ରାଶିକୁ ସମାନ ସମାନ ରାଶି ବା ଏକ ରାଶି ଦ୍ୱାରା (ଶୂନ ବ୍ୟତୀତ) ଭାଗ କଲେ ଭାଗଫଳ ମଧ୍ୟ ସମାନ ହେବେ ।

ଉଦାହରଣ –1 :

(i) ସମାଧାନ କର : (i) $2x - 3 = 7$ (ii) $2y + 9 = 4$

ସମାଧାନ : (i) $2x - 3 = 7$

$\Rightarrow 2x - 3 + 3 = 7 + 3$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ 3 ଯୋଗ କରାଗଲା)

$\Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 2 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା)

$\Rightarrow x = 5$ $\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ବୀଜ ହେଉଛି 5 ।

(ii) $2y + 9 = 4$

ସମାଧାନ : $2y + 9 = 4$

$\Rightarrow 2y + 9 - 9 = 4 - 9$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରୁ 9 ବିୟୋଗ କରାଗଲା)

$\Rightarrow 2y = -5 \Rightarrow \frac{2y}{2} = \frac{-5}{2}$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 2 ଦ୍ୱରା ଭାଗ କରାଗଲା)

$\Rightarrow y = \frac{-5}{2}$ $\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ବୀଜ ହେଉଛି $\frac{-5}{2}$ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : ଉଦାହରଣ 1(i) ରେ ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ -3 କୁ ଅପସାରଣ କଲାପରେ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱରେ $+3$ ଥିବାର ଦେଖାଗଲା । ଉଦାହରଣ 1(ii) ରେ ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ 9 ର ଅପସାରଣ ଦ୍ୱାରା ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ (-9) ଥିବାର ଦେଖାଗଲା ।

ଏଥିରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, **କୌଣସି ପଦର ପାର୍ଶ୍ୱପରିବର୍ତ୍ତନ (ବାମପାର୍ଶ୍ୱରୁ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ ବା ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱରୁ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ) ବେଳେ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୁଏ । ଅର୍ଥାତ୍ ଯୋଗରୁ ବିୟୋଗ ଏବଂ ବିୟୋଗରୁ ଯୋଗ, ହରଣରୁ ଗୁଣନ ଓ ଗୁଣନରୁ ହରଣ ହୁଏ ।**

ଉଦାହରଣ – 2 : ସମାଧାନ କର : (i) $\frac{x}{3} = 4$ (ii) $3x = 15$ (iii) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - 1 = 4$

ସମାଧାନ : (i) $\frac{x}{3} = 4 \Rightarrow \frac{x}{3} \times 3 = 4 \times 3$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 3 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରାଗଲା)

$\Rightarrow x = 12$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : ବାମପାର୍ଶ୍ୱରୁ 3 ଭାଜକ ଅପସାରଣ ପରେ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଉକ୍ତ ଭାଜକର ଗୁଣନ ହେଲା ।

(ii) $3x = 15 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 3 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା)

$\Rightarrow x = 5$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : ବାମପାର୍ଶ୍ୱରୁ x ର ସହଗ 3 ଅପସାରଣ ପରେ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ 3 ଭାଜକ ଭାବେ ରହିଲା ।

(iii) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - 1 = 4$

$\Rightarrow \frac{3x + 2x}{6} - 1 = 4 \Rightarrow \frac{5x}{6} - 1 = 4$

$\Rightarrow \left(\frac{5x}{6}-1\right)+1=4+1$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ 1 ଯୋଗ କରାଗଲା)

$\Rightarrow \frac{5x}{6}=5 \Rightarrow \frac{5x}{6} \times 6 = 5 \times 6$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 6 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରାଗଲା)

$\Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{30}{5}$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 5 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା)

$\Rightarrow x = 6$

ଉପରୋକ୍ତ ଦୁଇଟି ଉଦାହରଣରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ କୌଣସି ପଦର, ପାର୍ଶ୍ୱ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେଲେ ସଂପୃକ୍ତ ପଦର ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୁଏ

(ନିଜେ କର) **ସମାଧାନ କର :**

(i) $2x - 3 = 4$ (ii) $3x+\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ (iii) $2x+\frac{3}{4}=x-\frac{1}{4}$

(iv) $0.3(6+y)=0.4$ (v) $\frac{3x}{5}+1=\frac{2}{5}$

7.5.1 ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ସମାଧାନ ନିମିତ୍ତ ସୂଚନା :

(i) ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ସମ୍ବଳିତ ସମସ୍ତ ପଦ ବାମପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଓ ଜ୍ଞାତ ରାଶି ଥିବା ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱକୁ ପକ୍ଷାନ୍ତର (ପାର୍ଶ୍ୱ ପରିବର୍ତ୍ତନ) କରାଯାଏ ।

(ii) ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱର ଏକାଧିକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ସମ୍ବଳିତ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଏକତ୍ର କରାଯାଇ ଗୋଟିଏ ପଦରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ଓ ସେହିପରି ଅବଶିଷ୍ଟ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱରେ ଏକତ୍ର କରାଯାଏ ।

(iii) ତତ୍ପରେ ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ପଦ (ax ଅଥବା $\frac{a}{x}$) ରୁ x (ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି)ର ମାନ ସ୍ଥିର କରାଯାଏ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଉଦାହରଣ – 3 : ସମାଧାନ କର : $2x - 3 = x + 2$

ସମାଧାନ : $2x - 3 = x + 2 \Rightarrow 2x - 3 + 3 = x + 2 + 3$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ 3 ଯୋଗ କରି)

$\Rightarrow 2x = x + 5 \Rightarrow 2x - x = 5$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରୁ x ବିୟୋଗ କରି)

$\Rightarrow x = 5$

ଉଦାହରଣ–4 : ସମାଧାନ କର : $\frac{5x}{2}-\frac{7}{2}=\frac{3x}{2}-4$

ସମାଧାନ : $\frac{5x}{2}-\frac{7}{2}=\frac{3x}{2}-4 \Rightarrow \frac{5x}{2}=\frac{3x}{2}-4+\frac{7}{2}$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ $\frac{7}{2}$ ଯୋଗ କରି)

$$\Rightarrow \frac{5x}{2}-\frac{3x}{2}=-4+\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{5x-3x}{2}=\frac{-8+7}{2} \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{-1}{2} \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

ଉଦାହରଣ– 5 : ସମାଧାନ କର : $\frac{6x+1}{3}+1=\frac{x-3}{6}$

ସମାଧାନ : $\frac{6x+1}{3}+1=\frac{x-3}{6} \Rightarrow \frac{6x+1+3}{3}=\frac{x-3}{6} \Rightarrow \frac{6x+4}{3}=\frac{x-3}{6}$

$\Rightarrow \frac{(6x+4)}{3} \times 6 = \frac{x-3}{6} \times 6$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 6 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି, ∵ 3 ଓ 6 ର ଲ.ସା.ଗୁ 6)

$\Rightarrow 12x + 8 = x - 3 \Rightarrow 12x - x + 8 = -3$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରୁ x ବିୟୋଗ କରି)

$\Rightarrow 11x = -3 - 8$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରୁ 8 ବିୟୋଗ କରି)

$\Rightarrow 11x = -11$

$\Rightarrow x = \frac{-11}{11}$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 11 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି)

$\Rightarrow x = -1$

ଉଦାହରଣ– 6 : ସମାଧାନ କର : $\frac{3x+5}{7x-3} = \frac{4}{5}$

ସମାଧାନ : $\frac{3x+5}{7x-3} = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow 5(3x+5) = 4(7x-3)$ (ବଜ୍ର ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା)

[$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow AD = BC \ (B \neq 0, D \neq 0)$. ଏହାକୁ ବଜ୍ର ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା କୁହାଯାଏ ।]

$\Rightarrow 15x + 25 = 28x - 12$

$\Rightarrow 15x - 28x + 25 = -12$ (28x ର ପାର୍ଶ୍ୱ ପରିବର୍ତ୍ତନ କଲେ)

$\Rightarrow -13x = -12 - 25$ (25 ର ପାର୍ଶ୍ୱ ପରିବର୍ତ୍ତନ କଲେ)

$\Rightarrow x = \frac{-37}{-13}$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱ କୁ –13 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ)

$\Rightarrow x = \frac{37}{13} \Rightarrow x = 2\frac{11}{13}$

ଉଦାହରଣ– 7 : ସମାଧାନ କର : $z(z+6) = z(z+7) - 6$

ସମାଧାନ : $z(z+6) = z(z+7) - 6$

$\Rightarrow z^2 + 6z = z^2 + 7z - 6$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$\Rightarrow z^2 + 6z - z^2 = z^2 + 7z - 6 - z^2$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରୁ z^2 ବିୟୋଗ କଲେ)

$\Rightarrow 6z - 7z = 7z - 6 - 7z$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରୁ 7z ବିୟୋଗ କଲେ)

$\Rightarrow -z = -6 \Rightarrow z = 6$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ –1 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରି)

[**ଟୀକା:** ସମୀକରଣଟିକୁ ସମାଧାନ କରି ସାରିବା ପରେ ଲବ୍ଧ ମୂଳକୁ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ସ୍ଥାନରେ ଲେଖି ସମୀକରଣର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ ଓ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାନତାକୁ ପରୀକ୍ଷା କରିବା ଉଚିତ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ **ଉଦାହରଣ – 7** ରେ ମୂଳଟି $z = 6$

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ $z(z+6) = z(z+7) - 6$ ର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ $= z(z+6) = 6(6+6) = 6 \times 12 = 72$;

ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ $= z(z+7) - 6 = 6(6+7) - 6 = 6 \times 13 - 6$ ହେଲେ $= 78 - 6 = 72$

ଅର୍ଥାତ୍ $z = 6$ ପାଇଁ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ]

ଉଦାହରଣ– **8 :** ସମାଧାନ କର : $x(x+9) = (x+3)(x+7) - 10$

ସମାଧାନ : $x(x+9) = (x+3)(x+7) - 10 \Rightarrow x^2 + 9x = x^2 + 3x + 7x + 21 - 10$

$\Rightarrow x^2 + 9x = x^2 + 10x + 11 \Rightarrow x^2 - x^2 + 9x - 10x = 11$ (ପକ୍ଷାନ୍ତରଣ ଦ୍ୱାରା)

$\Rightarrow -x = 11 \Rightarrow x = -11$ (ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱକୁ –1 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7(a)

ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ମାନ ମଧ୍ୟରୁ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣରେ ଥିବା ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ଠିକ୍‌ମାନଟିକୁ ବାଛି ଲେଖ ।

1. (i) $x - 2 = 7$ (2, 7, 9, 11) (ii) $y + 3 = 10$ (3, 7, 11, 13)

(iii) $2x = 8$ (4, 6, 8, 10) (iv) $\frac{x}{3} = 7$ (10, 14, 18, 21)

(v) $8 - x = 3$ (3, 5, 8, 11) (vi) $7 - x = 2$ (5, 6, 7, 8)

(vii) $x \times \frac{t}{5} = 10$ (40,50,60,70) (viii) $1.6 = \frac{y}{1.5}$ (1.5, 1.6, 2.1, 2.4)

(ix) $-8 - x = 3$ (–11, –5, 0, 11) (x) $\frac{2}{3}x = 1.4$ (1.4, 2.1, 2.8, 4.2)

2. **ନିମ୍ନ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ କର ।**

(i) $3x + 7 = x + 15$ (ii) $2x - 5 = x + 11$ (iii) $2x - 6 = 5x + 9$

(iv) $4x - 8 = 3x + 9$ (v) $5x - 6 = 4x + 3$ (vi) $\frac{3}{7} + z = \frac{17}{7}$

(vii) $\frac{5x}{3} + \frac{2}{5} = 1$ (viii) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 13$ (ix) $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{8} = \frac{7}{12}$

(x) $\frac{7}{x} + \frac{3}{5} = \frac{-1}{10}$

3. **ସମାଧାନ କର :** (ବଜ୍ରଗୁଣନ ପ୍ରଣାଳୀର ସାହାଯ୍ୟରେ)

(i) $\frac{x+2}{x-2} = \frac{3}{2}$ (ii) $\frac{7y+2}{5} = \frac{6y-5}{11}$ (iii) $\frac{x+7}{2x-5} = \frac{1}{3}$

(iv) $\frac{5x+6}{3x-5} = \frac{4}{3}$ (v) $\frac{x+\frac{1}{2}}{2x-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

4. **ସମାଧାନ କର । ତତ୍ପରେ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ପରିବର୍ତ୍ତେ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମୂଳକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାନତାକୁ ପରୀକ୍ଷା କର ।**

(i) $2(x + 3) + 7(x - 7) = 3(x + 6) + 12$

(ii) $(x + 1)(x + 2) + 6 = (x - 3)(x - 4)$

(iii) $x(x + 11) = (x + 5)(x + 7) - 9$

(iv) $2(x + 3) + 15 = 3(2x - 4) + 24$

(v) $24x - 8(2x + 8) = 6x - (2 - x) - 72$

7.6 ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ପ୍ରୟୋଗ (Application of linear equation) :

ପାଟୀଗଣିତ ସମ୍ପର୍କୀୟ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କରେ ଆବଶ୍ୟକ ଉତ୍ତର ପାଇଁ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିକୁ ନେଇ ଏକ ସମୀକରଣ ଗଠନ କରାଯାଇ ଥାଏ ଓ ଏହି ସମୀକରଣକୁ ସମାଧାନ କରିବାପରେ ଆବଶ୍ୟକ ଉତ୍ତରଟି ସହଜରେ ମିଳେ । ଏ ପ୍ରକାର ପ୍ରଣାଳୀକୁ ବୀଜ ଗାଣିତିକ ପ୍ରଣାଳୀରେ ସମାଧାନ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ନିମ୍ନରେ କେତେକ ସମାଧାନ ଦିଆଯାଇଛି । ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ପ୍ରଥମ ସୋପାନ : ପାଟୀଗଣିତ ପ୍ରଶ୍ନଟିରେ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିଟିକୁ ଚିହ୍ନଟ କର ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ସୋପାନ: ପ୍ରଶ୍ନରେ ଥିବା ସର୍ତ୍ତମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

ତୃତୀୟ ସୋପାନ : ଲବ୍ଧ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କର ।

ଉଦାହରଣ- 9 : କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାରେ 7 ଯୋଗକଲେ ଯୋଗଫଳ 103 ହେବ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି x ।

ପ୍ରଶ୍ନ ଅନୁଯାୟୀ $x + 7 = 103 \Rightarrow x + 7 - 7 = 103 - 7$

$\Rightarrow x = 96$ $\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି 96 । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- 10 : ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ 74 । ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଅନ୍ୟସଂଖ୍ୟା ଅପେକ୍ଷା 10 ଅଧିକ । ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି କେତେ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ସାନ ସଂଖ୍ୟାଟି x । ଅନ୍ୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ହେବ x + 10

ପ୍ରଶ୍ନ ଅନୁଯାୟୀ $x + (x + 10) = 74 \Rightarrow 2x + 10 = 74$

$\Rightarrow 2x = 74 - 10 \Rightarrow 2x = 64 \Rightarrow x = 32$

$\therefore$ ସାନ ସଂଖ୍ୟାଟି 32 ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ସଂଖ୍ୟାଟି $= 32 + 10 = 42$ ହେବ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- 11 : ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାର ଦୁଇଗୁଣ, ସଂଖ୍ୟାଟିର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ଠାରୁ 45 ଅଧିକ । ସଂଖ୍ୟାଟି ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟି x । ଏହାର 2 ଗୁଣ 2x ଏବଂ ସଂଖ୍ୟାର ଅର୍ଦ୍ଧେକ $\frac{x}{2}$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $2x - \frac{x}{2} = 45 \Rightarrow \frac{4x - x}{2} = 45 \Rightarrow \frac{3x}{2} = 45$

$\Rightarrow x = 45 \times \frac{2}{3} \Rightarrow x = 30$

$\therefore$ ସଂଖ୍ୟାଟି 30 (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- 12 : ଗୋଟିଏ ଦୁଇ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 8 । ଯଦି ସଂଖ୍ୟାଟିରେ 18 ଯୋଗ କରାଯାଏ, ତେବେ ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ବଦଳିଯାଏ । ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଟିର ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ x । ତେଣୁ ଦଶକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ 8 – x ।

$\therefore$ ସଂଖ୍ୟାଟି $= 10(8 - x) + x$

ସଂଖ୍ୟାଟିର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ବଦଳାଇଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟି ହେବ $10x + (8 - x)$ ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $[10(8 - x) + x] + 18 = 10x + 8 - x$

$\Rightarrow 80 - 10x + x + 18 = 10x + 8 - x \Rightarrow 98 - 9x = 9x + 8$

$\Rightarrow 98 - 8 = 9x + 9x \Rightarrow 90 = 18x \Rightarrow 18x = 90 \Rightarrow x = \frac{90}{18} = 5$

ଏକକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କ 5 ହେଲେ ଦଶକ ସ୍ଥାନୀୟ ଅଙ୍କଟି ହେବ $8 - 5 = 3$

$\therefore$ ସଂଖ୍ୟାଟି $= 10 \times 3 + 5 = 35$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- 13 : ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ହର, ଲବ ଅପେକ୍ଷା 8 ଅଧିକ । ଲବ ଓ ହର ପ୍ରତ୍ୟେକରେ "9" ଲେଖାଏଁ ଯୋଗ କଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି $\frac{11}{15}$ ସହ ସମାନ ହୁଏ । ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟିର ଲବକୁ x ନିଆଯାଉ । ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ ହର $= x + 8$

$\therefore$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି $= \frac{x}{x+8}$ ପୁନଶ୍ଚ ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $\frac{x+9}{(x+8)+9} = \frac{11}{15}$

$\Rightarrow (x + 9)\ 15 = (x + 17)\ 11 \Rightarrow 15x + 135 = 11x + 187$

$\Rightarrow 15x - 11x = 187 - 135 \Rightarrow 4x = 52 \Rightarrow x = 13$

$\therefore$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $= \frac{x}{x+8} = \frac{13}{13+8} = \frac{13}{21}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- 14 : ଅର୍ଜ୍ଜୁନର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ, ଶ୍ରୀୟା ବୟସର ଦୁଇଗୁଣ । ପାଞ୍ଚ ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ତା'ର ବୟସ ଶ୍ରୀୟା ବୟସର 3 ଗୁଣ ଥିଲା । ସେମାନଙ୍କର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଶ୍ରୀୟାର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ x ବର୍ଷ । ତେଣୁ ଅର୍ଜ୍ଜୁନର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ 2x ବର୍ଷ ।

5 ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ଶ୍ରୀୟାର ବୟସ $= (x - 5)$ ବର୍ଷ ଏବଂ

5 ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ଅର୍ଜ୍ଜୁନର ବୟସ $= (2x - 5)$ ବର୍ଷ ଥିଲା ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $2x - 5 = 3\,(x - 5)$

$\Rightarrow 2x - 5 = 3x - 15 \Rightarrow 15 - 5 = 3x - 2x \Rightarrow 10 = x$

$\Rightarrow x = 10$

$\therefore$ ଶ୍ରୀୟାର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ $= 10$ ବର୍ଷ ଏବଂ

ଅର୍ଜ୍ଜୁନର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ $= (2 \times 10)$ ବର୍ଷ $= 20$ ବର୍ଷ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7(b)

1. କୌଣସି ଏକ ସଂଖ୍ୟାର $\frac{4}{5}$, ସେହି ସଂଖ୍ୟାର $\frac{3}{4}$ ଠାରୁ 4 ଅଧିକ । ସଂଖ୍ୟାଟି ସ୍ଥିର କର ।
2. କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାର $\frac{1}{3}$, ଏହାର $\frac{1}{4}$ ଅପେକ୍ଷା 6 ଅଧିକ ?
3. କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାର $\frac{1}{2}$, 12ରୁ ଯେତେ କମ୍ ଏହାର $\frac{5}{2}$, 12 ରୁ ସେତେ ଅଧିକ ?
4. ତିନୋଟି କ୍ରମିକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି 33 ହେଲେ ମଧ୍ୟମ ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. କେଉଁ ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି 31 ?
6. ତିନୋଟି କ୍ରମିକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ 36 ହେଲେ, ବୃହତ୍ତମ ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ହମିଦ୍ ଟଙ୍କାର 15%, ରସିଦ ଟଙ୍କାର 20% ସହ ସମାନ । ଦୁଇଜଣଙ୍କର ଟଙ୍କା ମିଶି 350 ହେଲେ କାହାର ଟଙ୍କା କେତେ ?

8. ଦୁଇ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ୨ । ଯଦି ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ବଦଳାଯାଏ ତେବେ ନୂତନ ସଂଖ୍ୟାଟି ମୂଳ ସଂଖ୍ୟା ଠାରୁ 27 ଅଧିକ ହେବ । ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ଦୁଇ ଅଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 10 । ସଂଖ୍ୟାଟିରେ 36 ଯୋଗ କଲେ ସଂଖ୍ୟାଟିର ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ବଦଳିଯାଏ । ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାର 20% ଏହାର 12% ଅପେକ୍ଷା 12 ଅଧିକ ?

11. ଦୁଇଟି ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ଅନ୍ତର 30 । ସେମାନଙ୍କର ଅନୁପାତ 2:5 ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି କେତେ ?

12. ଗୋଟିଏ ଶ୍ରେଣୀର ମୋଟ ପିଲା ସଂଖ୍ୟା 49 । ପୁଅ ପିଲାଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ଝିଅ ପିଲାଙ୍କ ସଂଖ୍ୟାର $\frac{3}{4}$ ଗୁଣ ହେଲେ ଶ୍ରେଣୀରେ ପୁଅ ଓ ଝିଅଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

13. ଦୁଇଟି ଅନୁପୂରକ କୋଣର ଅନ୍ତର 10^0 ହେଲେ, କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

14. ଗୋଟିଏ ଥଳିରେ ଟ. 500 ର 5 ଟଙ୍କିଆ ଓ 10 ଟଙ୍କିଆ ମୁଦ୍ରା ଅଛି । ମୋଟ ମୁଦ୍ରା ସଂଖ୍ୟା 75 ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରକାର ମୁଦ୍ରା ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

15. ଗୋଟିଏ ଆୟତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥର ଦୁଇଗୁଣ । ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ପରିସୀମା 150 ମିଟର ହେଲେ ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ନିରୂପଣ କର ।

16. ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଲବ ଓ ହରର ଅନୁପାତ 3 : 4 । ହରରେ 3 ଯୋଗ କଲେ, ଲବ ଓ ହରର ଅନୁପାତ 3:5 ହୁଏ । ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ସ୍ଥିର କର ।

17. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣତ୍ରୟର ପରିମାଣରୁ 10^0 ଲେଖାଏଁ କମାଇ ଦେଲେ ଅବଶିଷ୍ଟର ଅନୁପାତ 6 : 4 : 5 ହୁଏ । ତ୍ରିଭୁଜଟିର ବୃହତ୍ତମ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

18. ଶରତ ତା' ଘରଠାରୁ ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 4 କି.ମି. ବେଗରେ ସ୍କୁଲ କୁ ଯାଇ ଘଣ୍ଟା ବାଜିବାର 12 ମିନିଟ୍ ପରେ ପହଞ୍ଚିଲା । ପରଦିନ ସେ ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି 5 କି.ମି. ବେଗରେ ଯାଇ ଠିକ୍ ସମୟରେ ସ୍କୁଲରେ ପହଞ୍ଚିଲା । ଉଭୟ ଦିନ ସେ ଘରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟରେ ସ୍କୁଲ୍‌କୁ ଯାଇଥିଲେ, ତା' ଘରଠାରୁ ସ୍କୁଲର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7.7 ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଓ ତା'ର ସମାଧାନ (Quadratic equation and its solution):

ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ସମୀକରଣରେ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ 2 ହେଲେ, ଏହାକୁ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।

ଏହାର ସାଧାରଣ ରୂପ ହେଲା $ax^2 + bx + c = 0$ ଯେଉଁଠାରେ $a \neq 0$ ।

ଏଠାରେ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍; ଯାହାର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ସମ୍ଭବ । ଉକ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦ୍ୱାରା ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କରାଯାଏ ।

ପୂର୍ବ ଅଧ୍ୟାୟରେ ତୁମେମାନେ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର କିପରି ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ତାହା ତୁମେ ଜାଣିଛ । ପଢ଼ାଯାଇଥିବା ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକୁ ମନେ ପକାଅ ।

ସେ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକ ହେଲା –

(i) $a^2 - b^2 = (a+b)(a - b)$

(ii) $x^2 + (a+b)x + ab = (x + a)(x + b)$

(iii) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

ଉପରୋକ୍ତ ଅଭେଦର ପ୍ରୟୋଗରେ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ସମ୍ଭବ ହୋଇଥାଏ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଦୁଇଟି ଏକଘାତୀ ଉତ୍ପାଦକ ଥାଏ ।

ମନେରଖ : ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର କେବଳ ଦୁଇଟି ବୀଜ ରହିଛି ।

ଉଦାହରଣ– 15 : ସମାଧାନ କର : $x^2 - 36 = 0$

ସମାଧାନ : $x^2 - 36 = 0 \Rightarrow (x)^2 - (6)^2 = 0 = (x + 6)(x - 6) = 0$

{$a^2 - b^2 = (a+b)(a - b)$ଅଭେଦର ପ୍ରୟୋଗ}

$\Rightarrow (x + 6) = 0$ ଅଥବା $x - 6 = 0 \Rightarrow x = -6$ କିମ୍ବା $x = 6$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ : -6 ଓ 6 । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ– 16 : $x^2 - 5x + 6 = 0$ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କର ।

ସମାଧାନ : $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 + \{(-3) + (-2)\}x + (-3)(-2) = 0$

(ଅଭେଦର (ii)ର ପ୍ରୟୋଗ)

$\Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$

$\Rightarrow x - 3 = 0$ କିମ୍ବା $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 3$ କିମ୍ବା $x = 2$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ : 3 ଓ 2 (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ– 17 : ସମାଧାନ କର : $2x^2 - 9x + 4 = 0$

ସମାଧାନ : $2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 8x - x + 4 = 0$ [ଏଠାରେ ମଧ୍ୟମ ପଦର ସହଗ –9, ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ହେବ ଏବଂ ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 8 ହେବ ।]

$\Rightarrow 2x(x - 4) - 1(x - 4) = 0 \Rightarrow (x - 4)(2x - 1) = 0$

$\Rightarrow (x - 4) = 0$ ବା, $(2x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 4$ ବା $x = \frac{1}{2}$ $\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ : 4 ଓ $\frac{1}{2}$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ– 18 : ସମାଧାନ କର : $x^2 - 2x + 1 = 0$

ସମାଧାନ : $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x)^2 - 2.x.1 + (1)^2 = 0$

$\Rightarrow (x - 1)^2 = 0$ {ଅଭେଦ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ର ପ୍ରୟୋଗ}

$\Rightarrow (x - 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1) = 0$ ବା $(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$ (ଉତ୍ତର)

$\therefore$ ମୂଳଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକେ 1 (ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଦୁଇଟିଯାକ ବୀଜ ସମାନ ।)

ଉଦାହରଣ- **19 :** $x - \frac{18}{x} = 3$ ର ମୂଳଦ୍ୱୟ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $x - \frac{18}{x} = 3 \Rightarrow \frac{x^2 - 18}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 18 = 3x$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 3x - 18 = 0$

$\Rightarrow x(x-6) + 3(x-6) = 0 \quad \Rightarrow (x-6)(x+3) = 0$

$\Rightarrow x - 6 = 0$ ଅଥବା $x + 3 = 0$ ।

$\Rightarrow x = 6$ କିମ୍ବା $x = -3$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ : 6 ଓ –3 । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- **20 :** ସମାଧାନ କର : $x^2 - 2x = 323$

ସମାଧାନ : $x^2 - 2x = 323 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + (1)^2 = (1)^2 + 323$

$\Rightarrow (x-1)^2 = 324 \Rightarrow (x-1)^2 = (\pm 18)^2$

$\Rightarrow x - 1 = \pm 18 \Rightarrow x = 1 \pm 18$

$\Rightarrow x = 1 + 18$ କିମ୍ବା $x = 1 - 18 \Rightarrow x = 19$ କିମ୍ବା -17

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ : 19 ଓ – 17 । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7 (c)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କର ।

(i) $x^2 - 3x = 0$ (ii) $4x^2 - 25 = 0$ (iii) $2x^2 - 8 = 0$

(iv) $9x^2 = 16$ (v) $2x^2 + 5x = 0$ (vi) $ax^2 - bx = 0$

(vii) $\frac{x^2}{3} = 27$ (viii) $\frac{x^2}{9} = 81$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କର ।

(i) $x^2 - 2x - 3 = 0$ (ii) $x^2 - 4x = 5$

(iii) $x^2 - x = 20$ (iv) $x^2 + 7x + 12 = 0$

(v) $x^2 + 2x - 35 = 0$ (vi) $x^2 - 6x + 5 = 0$

(vii) $2x^2 - x - 3 = 0$ (viii) $3x^2 + 2x - 5 = 0$

(2(vii) ପାଇଁ ସୂଚନା: ଏପରି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ହେବ ଯେପରି ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ (–1) ଏବଂ ଗୁଣଫଳ (– 6) ହେବ ।)

(ix) $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ (x) $x^2 + (a-b)x - ab = 0$

(ସୂଚନା : ମୂଳଦ୍ୱୟକୁ a ଓ b ମାଧ୍ୟମରେ ସ୍ଥିର କର ।)

*****

ବ୍ୟାବସାୟିକ ଗଣିତ
(COMMERCIAL ARITHMETIC)

ଅଧ୍ୟାୟ **8**

MF6RTC

8.1 ଶତକଡ଼ା ଲାଭ କ୍ଷତି :

ବ୍ୟବସାୟରେ, ବ୍ୟବସାୟୀର ଲାଭ ବା କ୍ଷତି ହେବା ଆମେ ଜାଣିଛେ । କୌଣସି କାରଣରୁ ଯଦି ଦୋକାନୀ ବ୍ୟବସାୟରେ ଖଟାଇଥିବା ମୂଳଧନ ପାଏ ନାହିଁ; ଅର୍ଥାତ୍ କୌଣସି ପରିସ୍ଥିତିରେ ଦୋକାନୀ କିଣାଦାମ୍ ପାଇପାରେ ନାହିଁ ତେବେ ତାହାର କ୍ଷତି ହୁଏ ବୋଲି ଆମେ କହୁ । ଯଦି କିଣାଦାମ୍ ଠାରୁ ବ୍ୟବସାୟୀକୁ ଅଧିକ ମିଳେ, ତେବେ ଆମେ କହୁ ଲାଭ ହେଲା । ସାଧାରଣତଃ ଲାଭ ପାଇଁ ଦୋକାନୀ ବ୍ୟବସାୟ କରିଥାଏ ।

ବ୍ୟବସାୟରେ ଲାଭ ବା କ୍ଷତିକୁ ଶତକଡ଼ାରେ ହିସାବ କରି ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

8.1.1 ଶତକଡ଼ା ହିସାବ : କିଣା ମୂଲ୍ୟକୁ 100 ଟଙ୍କା ନେଇ ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟରୁ ଆମେ ଲାଭ ବା କ୍ଷତି ହିସାବ କରି ପ୍ରକାଶ କଲେ ତାହାକୁ ଶତକଡ଼ା ଲାଭ ବା କ୍ଷତି କୁହାଯାଏ । ତୁମେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ଲାଭ କ୍ଷତି ହିସାବ ସମ୍ପର୍କରେ ଜାଣିଛ ଏବଂ ଶତକଡ଼ା ଲାଭ ବା କ୍ଷତି କିପରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ତାହା ମଧ୍ୟ ଜାଣିଛ ।

ଉଦାହରଣ -1 :

ଜଣେ ଦୋକାନୀ ଦୁଇଟି ଜିନିଷ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ 100 ଟଙ୍କା ଲେଖାଏଁରେ କିଣିଲା । ଗୋଟିକୁ 130 ଟଙ୍କାରେ ଓ ଅନ୍ୟଟିକୁ 90 ଟଙ୍କାରେ ବିକ୍ରିକଲା । ତା'ର କେଉଁ ଜିନିଷରେ କେତେ ଶତକଡ଼ା ଲାଭ ବା କ୍ଷତି ହେଲା ?

ସମାଧାନ :

(i) ପ୍ରଥମ ଜିନିଷର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ 100 ଟଙ୍କା ଓ ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ 130 ଟଙ୍କା

ଏଠାରେ ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ ଅଧିକ ହେତୁ, **ଲାଭ = ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ – କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ**

= 130 ଟଙ୍କା – 100 ଟଙ୍କା = 30 ଟଙ୍କା ।

କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ 100 ଟଙ୍କା ହୋଇଥିବାରୁ ଶତକଡ଼ା ଲାଭ = 30%

(ii) ଦ୍ୱିତୀୟ ଜିନିଷର କିଣାଦାମ୍ 100 ଟଙ୍କା ଏବଂ ବିକ୍ରି ଦାମ୍ 90 ଟଙ୍କା

ଏଠାରେ ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ କମ୍, ତେଣୁ କ୍ଷତି ହେଲା ଏବଂ **କ୍ଷତି = କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ – ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ**

= 100 ଟଙ୍କା – 90 ଟଙ୍କା = 10ଟଙ୍କା

କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ 100 ଟଙ୍କା ହୋଇଥିବାରୁ ଶତକଡ଼ା କ୍ଷତି = 10%

ମନେରଖ : (i) ଲାଭ = ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ – କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ

(ii) $\%\text{ଲାଭ} = \frac{\text{ଲାଭ}}{\text{କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ}} \times 100$

(iii) କ୍ଷତି = କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ – ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ

(iv) $\%\text{କ୍ଷତି} = \frac{\text{କ୍ଷତି}}{\text{କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ}} \times 100$

ଉଦାହରଣ–2 : ଗୋଟିଏ ସାର୍ଟକୁ 360 ଟଙ୍କାରେ କିଣି 10% ଲାଭରେ ବିକ୍ରି କରାଗଲା । ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ + ଲାଭ

ମନେକର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = 100 ଟଙ୍କା, ଲାଭ = 10 ଟଙ୍କା

∴ ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = 100 ଟଙ୍କା + 10 ଟଙ୍କା = 110 ଟଙ୍କା

100 ଟଙ୍କା କ୍ରୟ ବେଳେ ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = 110 ଟଙ୍କା

1ଟଙ୍କା କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ ବେଳେ ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = $\frac{110}{100}$ ଟଙ୍କା ।

360 ଟଙ୍କା କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ ବେଳେ ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = $\frac{110}{100} \times 360$ ଟଙ୍କା = 396 ଟଙ୍କା

ବି.ଦ୍ର.: ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = $\left(\frac{110}{100} \times 360\right)$ ଟଙ୍କା ⇒ ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = $\frac{(100+10) \times 360}{100}$

ବିକଳ୍ପ ଭାବେ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା $\boxed{\text{ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ} = \frac{(100 + \text{ଲାଭ}\%) \times \text{କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ}}{100}}$

ଅଥବା ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = $\frac{(100 + \text{ଲାଭ}\%)}{100} \times \text{କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ} = \left(1 + \frac{\text{ଲାଭ}\%}{100}\right) \times \text{କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ}$

ଅର୍ଥାତ୍ $\boxed{\text{ଶତକଡ଼ା ଲାଭ } r\% \text{ ହେଲେ ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ} = \left(1 + \frac{r}{100}\right) \times \text{କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ}}$

ସେହିପରି $\boxed{\text{ଶତକଡ଼ା କ୍ଷତି } r\% \text{ ହେଲେ ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ} = \left(1 - \frac{r}{100}\right) \times \text{କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ}}$

ବିକଳ୍ପ ଭାବେ ଲେଖିପାରିବା: $\boxed{\text{ବିକ୍ରୟମୂଲ୍ୟ} = \frac{(100 - \text{କ୍ଷତି}\%) \times \text{କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ}}{100}}$

ଉଦାହରଣ-3: ଗୋଟିଏ ବହିଦୋକାନୀ ଗୋଟିଏ ବହିକୁ 72 ଟଙ୍କାରେ ବିକ୍ରୟ କରି ଶତକଡ଼ା 20 ଲାଭ କଲେ ବହିର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = 100 ଟଙ୍କା

$\therefore$ 100ଟଙ୍କା କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ ବେଳେ ଲାଭର ପରିମାଣ = 20 ଟଙ୍କା

ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ + ଲାଭ = 100 ଟଙ୍କା + 20 ଟଙ୍କା = 120 ଟଙ୍କା

ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ 120 ଟଙ୍କା ବେଳେ କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = 100 ଟଙ୍କା

ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ 72 ଟଙ୍କା ବେଳେ କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = $\frac{100}{120} \times 72$ ଟଙ୍କା = 60ଟଙ୍କା ।

ବି.ଦ୍ର.:ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ = $\frac{100 \times 72}{(100+20)} \Rightarrow$

କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = $\frac{100 \times \text{ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟ}}{(100 + \text{ଲାଭ})}$

ଉଦାହରଣ-4 : ଜଣେ ଲୋକ ଗୋଟିଏ ପଦାର୍ଥକୁ 75 ଟଙ୍କାରେ ବିକ୍ରିକରି କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟର $\frac{1}{4}$ ଲାଭ କଲା । ତେବେ ପଦାର୍ଥର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ କେତେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ପଦାର୍ଥର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = x ଟଙ୍କା, ଲାଭ = $\frac{x}{4}$ ଟଙ୍କା

ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = x ଟଙ୍କା + $\frac{x}{4}$ ଟଙ୍କା = $\frac{5x}{4}$ ଟଙ୍କା

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $\frac{5x}{4} = 75 \Rightarrow x = \frac{75 \times 4}{5} \Rightarrow x = 60$

$\therefore$ ପଦାର୍ଥର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ 60 ଟଙ୍କା ।

ଉଦାହରଣ-5 : ଜଣେ ଦୋକାନୀ ଗୋଟିଏ ବାକ୍ସକୁ 510 ଟଙ୍କାରେ ବିକ୍ରିକରି 15% କ୍ଷତି କଲେ । ଯଦି ସେ ବାକ୍ସକୁ 570ଟଙ୍କାରେ ବିକ୍ରି କରିଥା'ନ୍ତେ, ତେବେ ତାଙ୍କର କେତେ ଲାଭ ବା କ୍ଷତି ହୋଇଥାଆନ୍ତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ପ୍ରଥମ ବିକ୍ରି : ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = 510 ଟଙ୍କା, କ୍ଷତି = 15%

100 ଟଙ୍କା କ୍ରୟ ବେଳେ (100 – 15) ଅର୍ଥାତ୍ 85 ଟଙ୍କା ବିକ୍ରି

$\therefore$ 85 ଟଙ୍କା ବିକ୍ରି ବେଳେ ବାକ୍ସର କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ = 100 ଟଙ୍କା

510 ଟଙ୍କା ବିକ୍ରି ବେଳେ ବାକ୍ସର କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ = $\frac{100 \times 510}{85}$ ଟଙ୍କା = 600 ଟଙ୍କା

$\therefore$ ବାକ୍ସର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = 600 ଟଙ୍କା

ବି.ଦ୍ର. :

କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = $\frac{100 \times \text{ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟ}}{(100 - \text{କ୍ଷତି}\%)}$

ସୂତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇପାରେ ।

ପୁନଃ ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = 570 ଟଙ୍କା, କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = 600 ଟଙ୍କା

$\because$ ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ < କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ $\therefore$ କ୍ଷତି = 600 ଟଙ୍କା – 570 ଟଙ୍କା = 30 ଟଙ୍କା

$$\%\text{କ୍ଷତି} = \frac{\text{କ୍ଷତି}}{\text{କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ}} \times 100 = \frac{30 \times 100}{600} = 5\% \text{ (ଉତ୍ତର)}$$

ଉଦାହରଣ-6 : 20ଟି କଲମର ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟ 25ଟି କଲମର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ ସହ ସମାନ ହେଲେ ଶତକଡ଼ା ଲାଭ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : 20ଟି କଲମର ବିକ୍ରି ମୂଲ୍ୟ = 100 ଟଙ୍କା

$\therefore$ 25ଟି କଲମର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = 100 ଟଙ୍କା

ଗୋଟିଏ କଲମର ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = $\frac{100}{20}$ = 5 ଟଙ୍କା

25 ଟି କଲମର ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = 5 x 25 = 125 ଟଙ୍କା

$\therefore$ ଲାଭ = ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟ – କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ = (125 – 100) ଟଙ୍କା = 25 ଟଙ୍କା

$$\%\text{ଲାଭ} = \frac{\text{ଲାଭ}}{\text{କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ}} \times 100 = \left(\frac{25}{100} \times 100\right)\% = 25\% \text{ (ଉତ୍ତର)}$$

ଉଦାହରଣ-7 : ଜଣେ ଦୋକାନୀ ସମାନ ମୂଲ୍ୟରେ ଦୁଇଟି ଜିନିଷକୁ ବିକ୍ରୟ କରି ଗୋଟିକରେ 20% ଲାଭ ଓ ଅନ୍ୟଟିରେ 20% କ୍ଷତି ସହିଲେ । ତେବେ ବ୍ୟବସାୟରେ ଶତକଡ଼ା କେତେ ଲାଭ ବା କ୍ଷତି ହେଲା ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଜିନିଷର ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = 100 ଟଙ୍କା

ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାର ବିକ୍ରି : ଲାଭ = 20%

$$\text{କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ} = \frac{100 \times \text{ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟ}}{(100 + \text{ଲାଭ}\%)} = \frac{100 \times 100}{(100+20)} = \frac{100 \times 100}{120} = \frac{250}{3} \text{ ଟଙ୍କା}$$

ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରକାର ବିକ୍ରି : କ୍ଷତି = 20%

$$\text{କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ} = \frac{100 \times \text{ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟ}}{(100 - \text{କ୍ଷତି}\%)} = \frac{100 \times 100}{(100-20)} = \frac{100 \times 100}{80} = 125 \text{ ଟଙ୍କା}$$

$$\therefore \text{ଦୁଇଟି ଜିନିଷର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ} = \left(\frac{250}{3} + 125\right) = \frac{250+375}{3} = \frac{625}{3} \text{ ଟଙ୍କା}$$

ଏବଂ ଦୁଇଟି ଜିନିଷର ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = 200 ଟଙ୍କା ।

$$\text{କ୍ଷତି} = \text{କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ} - \text{ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ} = \left(\frac{625}{3} - 200\right)\text{ଟଙ୍କା} = \frac{25}{3} \text{ ଟଙ୍କା}$$

$\therefore$ ଶତକଡ଼ା କ୍ଷତି $= \dfrac{\text{କ୍ଷତି}}{\text{କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ}} \times 100 = \dfrac{\frac{25}{3}}{\frac{625}{3}} \times 100 = 4\%$

$\therefore$ ବ୍ୟବସାୟରେ ଶତକଡ଼ା କ୍ଷତିର ପରିମାଣ $= 4\%$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 8 : ଗୋଟିଏ ଫଳ ଦୋକାନୀ 20 କି.ଗ୍ରା. ସେଓ 300 ଟଙ୍କାରେ କିଣିଲେ । ତହିଁରୁ 2 କି.ଗ୍ରା. ପଚା ବାହାରିଲା । ଅବଶିଷ୍ଟ ସେଓ କି.ଗ୍ରା. ପ୍ରତି କେତେ ଦରରେ ବିକ୍ରୟ କଲେ 30% ଲାଭ ହେବ ?

ସମାଧାନ : ଅବଶିଷ୍ଟ ସେଓର ପରିମାଣ = 20 କି.ଗ୍ରା. – 2 କି.ଗ୍ରା. = 18 କି.ଗ୍ରା.; ଲାଭ = 30%

ଲାଭର ପରିମାଣ = କ୍ରୟମୂଲ୍ୟର 30% = $\left(300 \times \frac{30}{100}\right)$ ଟଙ୍କା = 90 ଟଙ୍କା

ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟ = କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ + ଲାଭ = (300 + 90) ଟଙ୍କା = 390 ଟଙ୍କା

18 କି.ଗ୍ରା. ସେଓ ର ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟ = 390 ଟଙ୍କା

$\therefore$ 1 କି.ଗ୍ରା. ସେଓର ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟ = $\frac{390}{18}$ ଟଙ୍କା = $21\frac{2}{3}$ ଟଙ୍କା (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ–9 : ଜଣେ ଦୋକାନୀ 2 ଟଙ୍କାରେ 5 ଟି ଦରରେ 100 ଟି ଲେମ୍ବୁ ଓ 3 ଟଙ୍କାରେ 8 ଟି ଦରରେ 80 ଟି ଲେମ୍ବୁ କିଣି ଗୋଟିକୁ 50 ପଇସା ହିସାବରେ ବିକ୍ରି କଲେ । ସେ ଶତକଡ଼ା କେତେ ଲାଭ କଲେ ?

ସମାଧାନ : 5 ଟି ଲେମ୍ବୁର କିଣାମୂଲ୍ୟ 2 ଟଙ୍କା । $\therefore$ 100 ଲେମ୍ବୁର କିଣାମୂଲ୍ୟ = $\frac{2 \times 100}{5} = 40$ ଟଙ୍କା

8 ଟି ଲେମ୍ବୁର କିଣାମୂଲ୍ୟ 3 ଟଙ୍କା । $\therefore$ 80 ଟି ଲେମ୍ବୁର କିଣାମୂଲ୍ୟ = $\frac{3 \times 80}{8} = 30$ ଟଙ୍କା

ଏଠାରେ ଦୁଇ ପ୍ରକାରର 180 ଟି ଲେମ୍ବୁର କିଣାମୂଲ୍ୟ = (40+30) ଟଙ୍କା = 70 ଟଙ୍କା

ଗୋଟିକୁ 50 ପଇସା ବା $\frac{1}{2}$ ଟଙ୍କା ହିସାବରେ 180 ଟି ଲେମ୍ବୁରେ ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = $180 \times \frac{1}{2} = 90$ ଟଙ୍କା

$\therefore$ ଲାଭ = ବିକ୍ରୟମୂଲ୍ୟ – କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ = 90 – 70 = 20 ଟଙ୍କା

$\therefore$ ଶତକଡ଼ା ଲାଭ = $\dfrac{\text{ଲାଭ}}{\text{କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ}} \times 100 = \frac{20}{70} \times 100 = 28\frac{4}{7}\%$ (ଉତ୍ତର)

8.2 ରିହାତି (Discount)

ଆମେ ପୋଷାକ ଦୋକାନକୁ ଗଲେ ଦେଖିବା, ପୋଷାକ ଉପରେ ଏକ ଦର ଲେଖାଯାଇଥାଏ । ସେହି ଦରକୁ ପୋଷାକର **ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ (Marked Price)** କୁହାଯାଏ । ସମୟ ସମୟରେ ବ୍ୟବସାୟୀମାନେ ଗ୍ରାହକମାନଙ୍କୁ ଆକୃଷ୍ଟ କରିବା ପାଇଁ ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟରୁ କିଛି ପରିମାଣ କମାଇ ସେମାନଙ୍କର ଜିନିଷ ବିକ୍ରି କରିଥାଆନ୍ତି । ଏହାକୁ **ରିହାତି** କୁହାଯାଏ । (ପୋଷାକ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ଯେକୌଣସି ସାମଗ୍ରୀ ହୋଇପାରେ)

ମନେରଖ :– **ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ ଉପରେ ରିହାତି ଶତକଡ଼ାରେ ହିସାବ କରାଯାଏ ।**

ଗୋଟିଏ ବହିର ମୂଲ୍ୟ 100 ଟଙ୍କା ଓ ରିହାତି 20% ହୁଏ, ତେବେ ଆମେ ବହିଟିକୁ 80 ଟଙ୍କାରେ ପାଉ ।

ମନେରଖ :– **ରିହାତି = ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ – ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ** ....(1)

ଉଦାହରଣ– 1: ଗୋଟିଏ ଘଣ୍ଟାର ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ 840 ଟଙ୍କା । ଘଣ୍ଟାଟିକୁ 714 ଟଙ୍କାରେ ବିକ୍ରି କରାଗଲା । ଶତକଡ଼ାରେ ରିହାତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ରିହାତି = ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ – ବିକ୍ରି ମୂଲ୍ୟ = 840 ଟଙ୍କା – 714 ଟଙ୍କା = 126 ଟଙ୍କା

ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ 840 ଟଙ୍କା ବେଳେ ରିହାତି = 126 ଟଙ୍କା

ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ 100 ଟଙ୍କା ବେଳେ ରିହାତି = $\left(\frac{126}{840} \times 100\right)\% = 15\%$

ମନେରଖ : ରିହାତି % = $\frac{\text{ରିହାତି}}{\text{ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ}} \times 100$ ....(2)

8.2.1 କ୍ରମିକ ରିହାତି (Successive Discount)

ଗାନ୍ଧୀ ଜୟନ୍ତୀ ଅବସରରେ ଖଦୀ ବସ୍ତ୍ର ଉପରେ କେନ୍ଦ୍ର ସରକାର ଓ ରାଜ୍ୟ ସରକାର ଉଭୟେ ରିହାତି ଦେଇଥା'ନ୍ତି । ମନେକର କେନ୍ଦ୍ର ସରକାରଙ୍କର ରିହାତି x% । ତାହା ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟରୁ ବାଦ୍ ଦେଲାପରେ ରାଜ୍ୟ ସରକାର ମନେକର y% ରିହାତି ଦେଲେ । ଏଭଳି ରିହାତିକୁ **କ୍ରମିକ ରିହାତି** କୁହାଯାଏ ।

ଆମେ ଜାଣୁ ରିହାତି, ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ (Marked price) ଉପରେ ଦିଆଯାଏ ।

ମନେକର ଜିନିଷର ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ z ଟଙ୍କା ।

(i) କେନ୍ଦ୍ର ସରକାରଙ୍କର ରିହାତି = x% = $z \times \frac{x}{100} = \frac{zx}{100}$ ଟଙ୍କା

କେନ୍ଦ୍ର ସରକାର ରିହାତି ପରେ ଅବଶିଷ୍ଟ ବିକ୍ରି ମୂଲ୍ୟ = $z - \frac{zx}{100} = z\left(1 - \frac{x}{100}\right)$ ଟଙ୍କା

ପୁନଶ୍ଚ ରାଜ୍ୟ ସରକାରଙ୍କର ରିହାତି = y% = $z\left(1-\frac{x}{100}\right) \times \frac{y}{100}$ ଟଙ୍କା= $\frac{yz}{100}\left(1-\frac{x}{100}\right)$ ଟଙ୍କା

କେନ୍ଦ୍ର ଓ ରାଜ୍ୟ ସରକାରଙ୍କ ରିହାତି ପରେ ରିହାତି ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟ

$$= z\left(1-\frac{x}{100}\right) - \frac{yz}{100}\left(1-\frac{x}{100}\right) = z\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{y}{100}\right) = \left(\frac{100-x}{100}\right)\left(\frac{100-y}{100}\right)$$

ଅର୍ଥାତ୍ ରିହାତି ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟ = ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ x $\left(\frac{100 - \text{ପ୍ରଥମ ରିହାତି \%}}{100}\right)\left(\frac{100 - \text{ଦ୍ୱିତୀୟ ରିହାତି \%}}{100}\right)$ ...(3)

ଉଦାହରଣ -2: ଦଶହରା ପୂଜାରେ ବୟନିକା ବସ୍ତ୍ର ଭଣ୍ଡାର ପ୍ରଥମେ 20% ଓ ତା'ପରେ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର 10% ରିହାତି ଦେଲେ । ଖଣ୍ଡିଏ ପାଟ ଶାଢ଼ୀର ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ 3000 ଟଙ୍କା ହେଲେ, ବିକ୍ରି ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ପ୍ରଥମ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ = 3000 ଟଙ୍କା

ପ୍ରଥମ ରିହାତି = 20% ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ ରିହାତି = 10%

$$\text{ଜିନିଷର ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟ} = \text{ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ} \times \left(\frac{100 - \text{ପ୍ରଥମ ରିହାତି}}{100}\right)\left(\frac{100 - \text{ଦ୍ୱିତୀୟ ରିହାତି}}{100}\right)$$

$$= \frac{3000 \times (100-20)(100-10)}{100 \times 100} \text{ ଟଙ୍କା} = \frac{3000 \times 80 \times 90}{100 \times 100} \text{ ଟଙ୍କା} = 2160 \text{ ଟଙ୍କା}$$

∴ ଶାଢ଼ୀଟିର ବିକ୍ରି ମୂଲ୍ୟ 2160 ଟଙ୍କା ।

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :- 3000 ଟଙ୍କାର 20% ରିହାତି $= \frac{3000 \times 20}{100}$ = 600 ଟଙ୍କା

ଅବଶିଷ୍ଟ ବିକ୍ରିମୂଲ୍ୟ = (3000 – 600) ଟଙ୍କା = 2400 ଟଙ୍କା

ପୁଣି ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ରିହାତି 10% ହେତୁ ରିହାତିର ପରିମାଣ = 2400 ଟଙ୍କାର 10% = 240 ଟଙ୍କା

∴ ଶାଢ଼ୀଟିର ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ = 2400 ଟଙ୍କା – 240 ଟଙ୍କା = 2160 ଟଙ୍କା

ଅନୁଶୀଳନୀ – 8(a)

1. ଜଣେ ଦୋକାନୀ ଗୋଟିଏ ବିଛଣାଚଦରକୁ 640 ଟଙ୍କାରେ ବିକ୍ରୟ କରି 28% ଲାଭ କଲା । ଚଦରଟିର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଜଣେ ଲୋକ 42ଟି ଲେମ୍ବୁ ବିକ୍ରିକରି 8ଟି ଲେମ୍ବୁର ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ କ୍ଷତି କଲା । ଶତକଡ଼ା କ୍ଷତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଜଣେ ଦୋକାନୀ 5ଟି ଲେମ୍ବୁର କିଣା ଦାମ୍‌ରେ 4ଟି ଲେମ୍ବୁ ବିକ୍ରୟ କଲେ, ଶତକଡ଼ା କେତେ ଲାଭ ବା କ୍ଷତି ହେବ ?

4. ଚାରିଟଙ୍କାରେ 5ଟି କମଳା କିଣି 5ଟଙ୍କାରେ 4ଟି କମଳା ବିକ୍ରୟ କଲେ ଶତକଡ଼ା କେତେ ଲାଭ ବା କ୍ଷତି ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ଆମ୍ବ କୋଡ଼ି 30 ଟଙ୍କାରେ କିଣି ଡଜନ 24 ଟଙ୍କାରେ ବିକିଲେ ଶତକଡ଼ା ଲାଭ କେତେ ହେବ ?

6. ଜଣେ ପରିବା ଦୋକାନୀ ଦୁଇ ପ୍ରକାର କାକୁଡ଼ି କୁଇଣ୍ଟାଲ ପ୍ରତି 500 ଟଙ୍କା ଓ 400 ଟଙ୍କାରେ କିଣି ଉଭୟକୁ ସମ ପରିମାଣରେ ମିଶାଇ କି.ଗ୍ରା. ପ୍ରତି କେତେରେ ବିକ୍ରୟ କଲେ ତାହାର 25% ଲାଭ ହେବ ?

7. ଜଣେ ବ୍ୟବସାୟୀ 1000 ଅଣ୍ଡା କିଣିଲା । ସେଥିରୁ 90ଟି ଅଣ୍ଡା ପଚିଗଲା । ଅବଶିଷ୍ଟ ଅଣ୍ଡାକୁ ପ୍ରତି ଡଜନ ଟ.9.60 ପଇସାରେ ବିକ୍ରି କରି 12% କ୍ଷତି କଲା । ବ୍ୟବସାୟୀ କେତେ ଟଙ୍କା ଦେଇ ଅଣ୍ଡାଗୁଡ଼ିକ କିଣିଥିଲା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ସମାନ ବିକ୍ରି ମୂଲ୍ୟର ଦୁଇଟି ଶାଢ଼ୀର ବିକ୍ରିରେ ଗୋଟିକରେ 25% ଲାଭ ଓ ଅନ୍ୟଟିରେ 25% କ୍ଷତି ହେଲା । ଦୋକାନୀର ଏଥିରେ ଶତକଡ଼ା କେତେ ଲାଭ ବା କ୍ଷତି ହେଲା ?

9. ଜଣେ ବ୍ୟବସାୟୀ ଦୁଇଟି ରେଡ଼ିଓ ସେଟ୍‌କୁ 1000 ଟଙ୍କାରେ କିଣି ଗୋଟିକୁ 20% କ୍ଷତିରେ ଓ ଅନ୍ୟଟିକୁ 20% ଲାଭରେ ବିକ୍ରୟ କଲା । ଯଦି ରେଡ଼ିଓ ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ବିକ୍ରି ମୂଲ୍ୟ ସମାନ ହୁଏ ତେବେ ପ୍ରତ୍ୟେକର କ୍ରୟମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଜଣେ ଦୋକାନୀ ଗୋଟିଏ ସାର୍ଟକୁ 20% ଲାଭରେ ବିକ୍ରି କଲା । ଯଦି ସେ ସାର୍ଟଟିକୁ 10% କମ୍‌ରେ କିଣି 75 ଟଙ୍କା ଅଧିକ ମୂଲ୍ୟରେ ବିକ୍ରି କରିଥା'ନ୍ତେ ତେବେ ତାର 50% ଲାଭ ହୋଇଥା'ନ୍ତା । ତେବେ ସାର୍ଟଟିର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. ପୂଜା ସମୟରେ ରାଜ୍ୟ ସରକାର 20% ଓ କେନ୍ଦ୍ର ସରକାର 5% ରିହାତିରେ ସମିତିର ଲୁଗା ବିକ୍ରୟ କରାଇଥା'ନ୍ତି । ଗୋଟିଏ ଲୁଗାର ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ 540 ଟଙ୍କା ହେଲେ ତାହାର ବିକ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ କେତେ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ପୂଜାରେ ଲୁଗା ବିକ୍ରିରେ ପ୍ରଥମେ 20% ଓ ପରବର୍ତ୍ତୀ ମୂଲ୍ୟରେ 10% ରିହାତି ଦିଆ ହୁଏ । ମୁଁ ଖଣ୍ଡିଏ ଶାଢ଼ୀ 360 ଟଙ୍କାରେ କିଣିଲି । ଏହାର ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ କେତେ ଥିଲା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

13. ସମାନ ମୂଲ୍ୟର ଦୁଇଟି ଲୁଗାରେ ଦୁଇଜଣ ଦୋକାନୀ ଯଥାକ୍ରମେ (i) 20% ଓ 10% (ii) 15% ଓ 15% ରିହାତି ଦିଅନ୍ତି । କେଉଁ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଲୁଗା କ୍ରୟ କରିବା ଲାଭ ଜନକ ?

14. ଜଣେ ବ୍ୟବସାୟୀ ଏକ ଘଣ୍ଟାର ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ ଉପରେ ଶତକଡ଼ା 10 ରିହାତି ଦିଅନ୍ତି । ଘଣ୍ଟାଟିର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ 300 ଟଙ୍କା ହେଲେ 20% ଲାଭ ପାଇବା ପାଇଁ ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ କେତେ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15. ଗୋଟିଏ ଟେବୁଲର ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ 800 ଟଙ୍କା । ଜଣେ ଖୁଚୁରା ବ୍ୟବସାୟୀ 10% ରିହାତିରେ କ୍ରୟ କଲା । ଯଦି ବ୍ୟବସାୟୀ ପରିବହନ ବାବଦ ଖର୍ଚ୍ଚ 10 ଟଙ୍କା ହୁଏ, ତେବେ ଟେବୁଲଟିକୁ ଖୁଚୁରା ବ୍ୟବସାୟୀଟି କେତେ ଟଙ୍କାରେ ବିକ୍ରୟ କଲେ ତା'ର 12% ଲାଭ ହେବ ?

16. ଜଣେ ଲୋକ 40% ଲାଭ ରଖି ଜିନିଷ ବିକ୍ରୟ କରୁଥିଲେ । ସେ 10% କମ୍ ମୂଲ୍ୟରେ କିଣି ବର୍ତ୍ତମାନ ମୂଲ୍ୟରୁ 10% ରିହାତି ଦେଲେ ତାଙ୍କର କେତେ ଶତକଡ଼ା ଲାଭ ହୁଅନ୍ତା ?

17. ଗୋଟିଏ ଜିନିଷର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ 500 ଟଙ୍କା । ଦୋକାନୀଟି ଜିନିଷରେ ଏକ ମୂଲ୍ୟ ଲେଖି ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ ଉପରେ 25% ରିହାତି ଦେଇ ବିକ୍ରିକଲେ, ଜିନିଷଟିରେ 10% ଲାଭ କରନ୍ତି । ତେବେ ଜିନିଷର ଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8.3 ସରଳ ସୁଧକଷା (Simple Interest)

ପୋଷ୍ଟ ଅଫିସ୍ ବା ବ୍ୟାଙ୍କରେ ଟଙ୍କା ସଞ୍ଚୟ କଲେ, ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟ ପରେ ଆମକୁ ଜମାରଖିଥିବା ଟଙ୍କା ଠାରୁ ଅଧିକ ଟଙ୍କା ମିଳିଥାଏ । ସେହିପରି ଆମର ଆବଶ୍ୟକ ସମୟରେ ଆମେ ବ୍ୟାଙ୍କ ବା ସ୍ଥାନୀୟ ମହାଜନଙ୍କ ଠାରୁ ଋଣ କରିଥାଉ । ବ୍ୟାଙ୍କର ବା ମହାଜନର ଟଙ୍କାକୁ ଆମେ କାମରେ ଲଗାଇଥିବାରୁ ଆମେ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟରେ ଋଣ ଟଙ୍କା ସହିତ ଆଉ ଅଧିକ ଟଙ୍କା ଦେଇ ଋଣମୁକ୍ତ ହେଉ । ଜମା ରଖିଥିବା କ୍ଷେତ୍ରରେ ବ୍ୟାଙ୍କରୁ ପାଉଥିବା ଅଧିକ ଟଙ୍କା ଅଥବା ବ୍ୟାଙ୍କରୁ ଋଣ ଆଣିଥିବା କ୍ଷେତ୍ରରେ ବ୍ୟାଙ୍କକୁ ଦେଉଥିବା ଅଧିକ ଟଙ୍କାକୁ **ସୁଧ (Interest)** କୁହାଯାଏ ।

କରଜର ପରିମାଣ (ବା କୌଣସି ସମୟ ପାଇଁ ଗଚ୍ଛିତ ଟଙ୍କାର ପରିମାଣ) କୁ **ମୂଳଧନ (Principal)** କୁହାଯାଏ ।

ମୂଳଧନ ଓ ସୁଧ ଟଙ୍କାର ସମଷ୍ଟିକୁ ସମୂଳ ସୁଧ **(Amount)** କୁହାଯାଏ ।

ସମୂଳ ସୁଧ = ମୂଳଧନ + ସୁଧ

ପ୍ରତି 100 ଟଙ୍କା ପାଇଁ ବାର୍ଷିକ ଯେତେ ସୁଧ ଦିଆଯାଏ ତାକୁ **ସୁଧର ହାର (Rate of interest)** କୁହାଯାଏ ।

ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ସୁଧ ହାରରେ କେବଳ ମୂଳଧନ ଉପରେ ସୁଧ ହିସାବ କରାଗଲେ ତାହାକୁ **ସରଳ ସୁଧ (Simple interest)** କୁହାଯାଏ ।

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ଆମେ ଐକିକ ଧାରାରେ ସୁଧ ହିସାବ ଜାଣିଛେ । ଏଥର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ସୁଧ ହିସାବ କରି ଶିଖିବା ।

ମନେକର ମୂଳଧନ = P ଟଙ୍କା, ସୁଧର ହାର = R%, ସମୟ = T ବର୍ଷ

100 ଟଙ୍କାର 1 ବର୍ଷର ସୁଧ = Rଟଙ୍କା; 1ଟଙ୍କାର 1 ବର୍ଷର ସୁଧ = $\frac{R}{100}$ ଟଙ୍କା

P ଟଙ୍କାର 1 ବର୍ଷର ସୁଧ = $\frac{PR}{100}$ ଟଙ୍କା । P ଟଙ୍କାର T ବର୍ଷର ସୁଧ = $\frac{PTR}{100}$ ଟଙ୍କା ।

ସରଳସୁଧ (I) = $\frac{PTR}{100}$ ...... (I) ସୂତ୍ର

ସୁଧର ପରିମାଣ ସର୍ବଦା ମୂଳଧନ, ସମୟ ଓ ସୁଧହାର ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ ।

8.3.1 ସରଳ ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଉଦାହରଣ-1 : ବାର୍ଷିକ 4.5% ହାରରେ 1200 ଟଙ୍କାର 5 ବର୍ଷର ସରଳ ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ମୂଳଧନ = P = 1200 ଟଙ୍କା, ସମୟ = T = 5 ବର୍ଷ

ସୁଧହାର = R% = 4.5%

ସରଳ ସୁଧ (I) = $\frac{PTR}{100} = \frac{1200 \times 4.5 \times 5}{100} = 12 \times 4.5 \times 5 = 270$ ଟଙ୍କା

∴ 1200 ଟଙ୍କାର ବାର୍ଷିକ 4.5% ହାରରେ 5 ବର୍ଷର ସରଳ ସୁଧ = 270 ଟଙ୍କା । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-2 : ବାର୍ଷିକ 6% ହାରରେ 2500 ଟଙ୍କାର 2ବର୍ଷ 6 ମାସର ସମୂଳ ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମୂଳଧନ (P) = 2500 ଟଙ୍କା, ସୁଧ ହାର = R% = 6%

ସମୟ (T) = $2\frac{6}{12}$ ବର୍ଷ = $2\frac{1}{2}$ ବର୍ଷ = $\frac{5}{2}$ ବର୍ଷ

ସରଳ ସୁଧ (I) = $\frac{PTR}{100} = \frac{2500 \times 6 \times 5}{2 \times 100}$ ଟଙ୍କା = $25 \times 3 \times 5 = 375$ ଟଙ୍କା

ସମୂଳ ସୁଧ = ମୂଳଧନ + ସରଳ ସୁଧ = (2500 + 375) ଟଙ୍କା = 2875 ଟଙ୍କା

∴ 2500 ଟଙ୍କାର 6% ହାରରେ 2 ବର୍ଷ 6 ମାସର ସମୂଳ ସୁଧ = 2875 ଟଙ୍କା (ଉତ୍ତର)

ମନେରଖ : A (ସମୂଳ ସୁଧ) = P (ମୂଳଧନ) + I (ସୁଧ)

$A = P + \frac{PTR}{100} = P\left(1 + \frac{TR}{100}\right)$ ବା ସମୂଳ ସୁଧ (A) = $P\left(1 + \frac{TR}{100}\right)$ ... (II) ସୂତ୍ର

ସୂଚନା : ସୁଧହାରରେ ସମୟର ସୂଚନା ନ ଥିଲେ ବାର୍ଷିକ ସୁଧହାର ବୋଲି ଧରାଯାଏ ।

ସୁଧହାର 5% ର ଅର୍ଥ ଶତକଡ଼ା ବାର୍ଷିକ ସରଳ ସୁଧହାର 5 ଟଙ୍କା ।

ଉଦାହରଣ-3 : ବାର୍ଷିକ 10% ହାରରେ 4500 ଟଙ୍କାର 73 ଦିନର ସୁଧ ଓ ସମୂଳ ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମୂଳଧନ (P) = 4500 ଟଙ୍କା

ସୁଧହାର = R% = 10%, ସମୟ = T = 73 ଦିନ = $\frac{73}{365}$ ବର୍ଷ ବା $\frac{1}{5}$ ବର୍ଷ

ସରଳ ସୁଧ (I) = $\frac{PTR}{100} = \frac{4500 \times 10 \times 1}{5 \times 100}$ ଟଙ୍କା = 9 x 10 = 90 ଟଙ୍କା

ସମୂଳ ସୁଧ = ମୂଳଧନ + ସୁଧ = 4500 ଟଙ୍କା + 90 ଟଙ୍କା = 4590 ଟଙ୍କା (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ-4 : ଟଙ୍କା ପ୍ରତି ମାସିକ 2 ପଇସା ହାରରେ 500 ଟଙ୍କାର $1\frac{1}{2}$ ବର୍ଷର ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : 1 ଟଙ୍କାର ମାସିକ ସୁଧ = 2 ପଇସା

100 ଟଙ୍କାର ମାସିକ ସୁଧ = 2ଟଙ୍କା, 100 ଟଙ୍କାର 1 ବର୍ଷର ସୁଧ = 2 x 12 = 24 ଟଙ୍କା

ଏଠାରେ ମୂଳଧନ (P) = 500 ଟଙ୍କା, ସୁଧର ହାର = (R%) = 24%

ସମୟ (T) = $1\frac{1}{2}$ ବର୍ଷ ବା $\frac{3}{2}$ ବର୍ଷ

ସରଳ ସୁଧ (I) = $\frac{PTR}{100} = \frac{500 \times 24 \times \frac{3}{2}}{100}$ ଟଙ୍କା = (5 x 12 x 3) ଟଙ୍କା = 180 ଟଙ୍କା

$\therefore$ 500 ଟଙ୍କାର $1\frac{1}{2}$ ବର୍ଷର ସୁଧ = 180 ଟଙ୍କା (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 5 : 6% ହାରରେ କେଉଁ ମୂଳଧନର 12 ବର୍ଷର ସରଳ ସୁଧ 648 ଟଙ୍କା ହେବ ?

ସମାଧାନ : ସୁଧର ହାର (R%) = 6%, ସମୟ (T) = 12 ବର୍ଷ

ସରଳ ସୁଧ (I) = 648 ଟଙ୍କା । ଆମକୁ ମୂଳଧନ (P) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ ।

ଆମେ ଜାଣୁ (I) = $\frac{PTR}{100} \Rightarrow P = \frac{100 \times I}{RT} = \frac{100 \times 648}{6 \times 12}$ = 900 ଟଙ୍କା ।

$\therefore$ 900 ଟଙ୍କାର 6% ହାରରେ 12 ବର୍ଷର ସୁଧ = 648 ଟଙ୍କା (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ– 6 : 12.5% ହାରରେ କୌଣସି ମୂଳଧନର ସମୂଳ ସୁଧ କେତେ ବର୍ଷରେ ଦୁଇଗୁଣ ହେବ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ମୂଳଧନ (P) = 100 ଟଙ୍କା

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ ସମୂଳ ସୁଧ = 200 ଟଙ୍କା, ସମୟ = T ବର୍ଷ, ଶତକଡ଼ା ସୁଧର ହାର = R% = 12.5%

ସୁଧ (I) = ସମୂଳ ସୁଧ – ମୂଳଧନ = 200 ଟଙ୍କା – 100 ଟଙ୍କା = 100 ଟଙ୍କା

$I = \frac{PTR}{100} \Rightarrow T = \frac{100 \times I}{PR} = \frac{100 \times 100}{100 \times 12.5} = 8$ ବର୍ଷ

∴ 12.5% ହାରରେ କୌଣସି ମୂଳଧନର ସମୂଳ ସୁଧ 8 ବର୍ଷରେ ଦୁଇଗୁଣ ହେବ । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 8(b)

1. (i) ଟଙ୍କା ପ୍ରତି ମାସକୁ 3 ପଇସା ସୁଧ ହାରରେ ଶତକଡ଼ା ବାର୍ଷିକ ସୁଧହାର କେତେ ?

   (ii) ଶତକଡ଼ା ବାର୍ଷିକ ସୁଧହାର 8 ଟଙ୍କା ହେଲେ, 1ଟଙ୍କାର ବାର୍ଷିକ ସୁଧ କେତେ ?

   (iii) ବାର୍ଷିକ ସୁଧ ମୂଳଧନର $\frac{1}{8}$ ଅଂଶ ହେଲେ, ଶତକଡ଼ା ବାର୍ଷିକ ସୁଧହାର କେତେ ?

   (iv) 1ଟଙ୍କାର 1 ବର୍ଷର ସୁଧ $\frac{1}{16}$ ଟଙ୍କା ହେଲେ, ଶତକଡ଼ା ବାର୍ଷିକ ସୁଧହାର କେତେ ?

2. ସଦାନନ୍ଦ ପୋଷ୍ଟ ଅଫିସ୍‌ରେ 8% ବାର୍ଷିକ ସୁଧରେ 6 ବର୍ଷ ପାଇଁ 8000 ଟଙ୍କା ସଞ୍ଚୟ କଲା । ସେ 6 ବର୍ଷ ପରେ ମୋଟରେ ପୋଷ୍ଟ ଅଫିସରୁ କେତେ ଟଙ୍କା ପାଇବ ?

3. 7.5% ହାରରେ 6000 ଟଙ୍କାର 6 ବର୍ଷର ସମୂଳ ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ହରିହର 10% ହାରରେ ବ୍ୟାଙ୍କରୁ 10,000 ଟଙ୍କା କରଜ କରି 13% ହାରରେ ଦୁଇଜଣ ଲୋକଙ୍କୁ କରଜ ଦେଲା । 5 ବର୍ଷ ଶେଷରେ ତା'ର ଏଥିରେ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ରଣ ପରିଶୋଧ କରି କେତେ ଲାଭ ପାଇବ ?

5. ରସାନନ୍ଦ ବ୍ୟାଙ୍କରୁ 10.5% ହାରରେ 12000 ଟଙ୍କା କରଜ କରି ଟଙ୍କା ପ୍ରତି ମାସିକ 2 ପଇସା ସୁଧରେ କରଜ ଦେଲା । ଏହା ଦ୍ୱାରା ବର୍ଷ ଶେଷରେ ସେ କେତେ ରୋଜଗାର କରିବ ?

6. ଟଙ୍କା ପ୍ରତି ମାସିକ 3 ପଇସା ହାରରେ P ଟଙ୍କାର T ବର୍ଷରେ ସମୂଳ ସୁଧ କେତେ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଶରତ ବ୍ୟାଙ୍କରୁ 12% ହାରରେ 3000 ଟଙ୍କା କରଜ କରି ବ୍ୟାଙ୍କକୁ 6600 ଟଙ୍କା ଦେଇ ଋଣ ମୁକ୍ତ ହେଲା । ସେ କେତେ ବର୍ଷ ପାଇଁ ଟଙ୍କା କରଜ କରିଥିଲା ?

8. 6% ହାରରେ କେଉଁ ମୂଳଧନର $7\frac{1}{2}$ ବର୍ଷର ସରଳ ସୁଧ 4500 ଟଙ୍କା ହେବ ?

9. କୌଣସି ମୂଳଧନ 20 ବର୍ଷରେ ସୁଧ ଓ ମୂଳ ମିଶି ମୂଳଧନର 3ଗୁଣ ହୋଇଯାଏ । ସୁଧ ହାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. କୌଣସି ମୂଳଧନର 2 ବର୍ଷର ସରଳ ସୁଧ, ସମୂଳ ସୁଧର $\frac{1}{9}$ ଅଂଶ । ସୁଧ ହାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. କୌଣସି ମୂଳଧନର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ହାରରେ 10 ବର୍ଷର ଓ 6 ବର୍ଷର ସମୂଳ ସୁଧ ଯଥାକ୍ରମେ 3000 ଟଙ୍କା ଓ 2600 ଟଙ୍କା । ମୂଳଧନ ଓ ସୁଧହାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. କୌଣସି ମୂଳଧନ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ହାରରେ 15 ବର୍ଷରେ 3 ଗୁଣ ହୋଇଯାଏ । ତେବେ ଉକ୍ତ ମୂଳଧନ କେତେ ବର୍ଷରେ 4 ଗୁଣ ହୋଇଯିବ ?

13. କୌଣସି ମୂଳଧନ 8 ବର୍ଷ 4 ମାସରେ ଦୁଇଗୁଣ ହୋଇଯାଏ । ଏହା କେତେ ବର୍ଷରେ 3 ଗୁଣ ହେବ ?

14. କୌଣସି ମୂଳଧନର ସରଳ ସୁଧ, ମୂଳଧନର $\frac{16}{25}$ । ଯଦି ସୁଧର ହାର ଓ ସମୟର ସାଂଖ୍ୟିକ ମାନ ସମାନ ହୁଏ ତେବେ ସୁଧର ହାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15. କୌଣସି ମୂଳଧନ 8% ହାରରେ 2 ବର୍ଷରେ 12, 122 ଟଙ୍କା ହୁଏ, ତେବେ ସେହି ମୂଳଧନ 9% ହାରରେ 2 ବର୍ଷ 8 ମାସରେ ସମୂଳ ସୁଧ କେତେ ହେବ ?

16. କରିମ୍ ଏକ ବ୍ୟାଙ୍କରେ 9000 ଟଙ୍କା ଜମା ଦେଲା । 2 ବର୍ଷ ପରେ ସେ 4000 ଟଙ୍କା ଉଠାଇଲା । 5 ବର୍ଷ ଶେଷରେ ସେ ବ୍ୟାଙ୍କରୁ 7640 ଟଙ୍କା ପାଇଲା । ସୁଧର ହାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8.4 ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ (Compound Interest) ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ସମୟେ ସମୟେ ସ୍ଥାୟୀ ଜମା ଉପରେ ବିଜ୍ଞାପନ ଦେବାର ତୁମେ ଜାଣିଛ । ବର୍ଷକ ପାଇଁ ସ୍ଥାୟୀ ଜମା ଉପରେ ସୁଧର ହାର 7% ଓ ସଞ୍ଚୟ ବ୍ୟାଙ୍କ ଉପରେ ସୁଧର ହାର 3.5% ।

ସାଧାରଣତଃ ଆମେ ସ୍ଥାୟୀ ଜମା ଉପରେ ପାଉଥିବା ସୁଧ, ସରଳ ସୁଧ ନୁହେଁ । ପୂର୍ବବର୍ଷର ମୂଳ ଓ ସୁଧ ମିଶି ପରବର୍ଷ ପାଇଁ ମୂଳରେ ପରିଣତ ହୁଏ । ସଞ୍ଚୟ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଜମା ଉପରେ ପ୍ରତି 6 ମାସରେ ସୁଧ ହିସାବ କରାଯାଇ ମୂଳଧନ ସହ ମିଶିଯାଏ । ମାତ୍ର ସ୍ଥାୟୀ ଜମା ଉପରେ 3 ମାସରେ ସୁଧ ହିସାବ କରାଯାଇ ମୂଳ ସହିତ ମିଶିଯାଏ । ସମୟ ସମୟରେ ମଧ୍ୟ ଏହାର ଅବଧି 4 ମାସ କିମ୍ବା 6 ମାସ ହୋଇଯାଏ । **ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟରେ ମୂଳଧନ ସହ ସୁଧକୁ ମିଶାଇ ପରବର୍ତ୍ତୀ ମୂଳଧନରେ ପରିଣତ କରିବା ଏବଂ ଉକ୍ତ ମୂଳଧନ ଉପରେ ସୁଧ ହିସାବ କରିବା ପ୍ରଥାକୁ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ (Compound interest) ହିସାବ କୁହାଯାଏ ।**

ଉଦାହରଣ– 1 : ମଧୁସୂଦନ ଏକ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ରୁ ରବି ଫସଲ ଚାଷ ପାଇଁ 10% ହାରରେ 1500 ଟଙ୍କା କରଜ କଲା । ଯଦି ପ୍ରତି ବର୍ଷ ଶେଷରେ ସୁଧ ହିସାବର ବ୍ୟବସ୍ଥା ଥାଏ, ତେବେ ବିଭିନ୍ନ ବର୍ଷ ଶେଷରେ ତାହାର ଦେୟ କେତେ ହେବ ? ସେ 2 ବର୍ଷ ପରେ ଋଣ ପରିଶୋଧ କଲେ ବ୍ୟାଙ୍କକୁ କେତେ ଟଙ୍କା ଦେବ ?

ସମାଧାନ : ପ୍ରଥମ ବର୍ଷର ମୂଳଧନ $(P_1) = 1500$ ଟଙ୍କା ଏବଂ ସୁଧର ହାର $(R\%) = 10\%$

ପ୍ରଥମବର୍ଷର ସୁଧ $(I_1) = \frac{P_1RT}{100} = \frac{1500 \times 10 \times 1}{100} = 150$ ଟଙ୍କା

ଦ୍ୱିତୀୟ ବର୍ଷର ମୂଳଧନ $= P_2 = P_1 + I_1 = (1500 + 150)$ ଟଙ୍କା $= 1650$ ଟଙ୍କା

ଦ୍ୱିତୀୟ ବର୍ଷର ସୁଧ = $I_2 = \frac{P_2RT}{100} = \frac{1650 X 10 X 1}{100}$ ଟଙ୍କା = 165 ଟଙ୍କା

ଦ୍ୱିତୀୟ ବର୍ଷ ଶେଷରେ ବ୍ୟାଙ୍କକୁ ପରିଶୋଧ କରିବା ଅର୍ଥର ପରିମାଣ

= (1650 + 165)ଟଙ୍କା = 1815 ଟଙ୍କା । ଏଠାରେ ସମୂଳ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ = 1815 ଟଙ୍କା

2 ବର୍ଷର ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ = ସମୂଳ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ – ମୂଳଧନ = (1815 – 1500) ଟ = 315 ଟଙ୍କା

ଦତ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନରେ ପ୍ରଥମ ବର୍ଷର ସୁଧ + ଦ୍ୱିତୀୟ ବର୍ଷର ସୁଧ = 150 + 165 = 315 ଟଙ୍କା

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର **ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ବର୍ଷ ଶେଷରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ସୁଧମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ** ; ଯାହା ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ 315 ଟଙ୍କା ସହ ସମାନ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଉପରୋକ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରରେ 2 ବର୍ଷର ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ଏବଂ ସରଳ ସୁଧ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପାର୍ଥକ୍ୟକୁ ଉପଲବ୍ଧି କରିବା । (ମୂଳଧନ =1500 ଟଙ୍କା, ସୁଧର ହାର = 10% ସମୟ = 2 ବର୍ଷ)

2 ବର୍ଷର ସରଳ ସୁଧ = $\frac{1500 X 10 X 2}{100}$ ଟ. = 300 ଟଙ୍କା

ଉଭୟ ସୁଧର ପାର୍ଥକ୍ୟ = 315 ଟଙ୍କା – 300ଟଙ୍କା = 15 ଟଙ୍କା

ସୂଚନା : ସରଳସୁଧ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମୂଳଧନ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବର୍ଷ ପାଇଁ ସମାନ ରହୁଥିବା ବେଳେ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରତିବର୍ଷ ଏହା ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ । କାରଣ ସୁଧ ମୂଳ ମିଶି ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟର ମୂଳଧନରେ ପରିଣତ ହୁଏ ।

ନିଜେ କର: (1) ମୂଳଧନ 100 ଟଙ୍କା ଓ ବାର୍ଷିକ ସୁଧର ହାର 10%ରେ 3 ବର୍ଷର ସରଳସୁଧ ଏବଂ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(2) 10000 ଟଙ୍କା ମୂଳଧନ ଓ ବାର୍ଷିକ ସୁଧର ହାର 10% ରେ 3 ବର୍ଷର ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । (ପ୍ରତ୍ୟେକ ବର୍ଷ ଶେଷରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ସୁଧର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ସ୍ଥିର କରି ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।)

8.4.1 ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ହିସାବର ସୂତ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ମନେକର ମୂଳଧନ = P ଟଙ୍କା, ବାର୍ଷିକ ସୁଧର ହାର = R%

ପ୍ରଥମ ବର୍ଷର ସୁଧ $(I_1) = \frac{PR X 1}{100} = \frac{PR}{100}$ ଟଙ୍କା

ପ୍ରଥମ ବର୍ଷର ସମୂଳ ସୁଧ (A_1) = ଦ୍ୱିତୀୟ ବର୍ଷର ମୂଳଧନ= ପ୍ରଥମ ବର୍ଷର ମୂଳଧନ+ପ୍ରଥମ ବର୍ଷର ସୁଧ

$$= P + \frac{PR}{100} = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

ଦ୍ୱିତୀୟ ବର୍ଷର ସୁଧ $(I_2) = P\left(1 + \frac{R}{100}\right) X \frac{R}{100}$ ଟଙ୍କା

ତୃତୀୟ ବର୍ଷର ମୂଳଧନ $(A_2) = P\left(1+\frac{R}{100}\right) + P\left(1+\frac{R}{100}\right) \times \frac{R}{100}$ ଟଙ୍କା

$$= P\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(1+\frac{R}{100}\right) \text{ ଟଙ୍କା } = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^2 \text{ ଟଙ୍କା}$$

ତୃତୀୟ ବର୍ଷର ସୁଧ $(I_3) = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^2 \times \frac{R}{100}$ ଏବଂ ତୃତୀୟ ବର୍ଷର ସମୂଳ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି $A_3 = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^3$ ହେବ ।

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ, n ବର୍ଷ ଶେଷରେ

ସମୂଳ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି $= A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$
ଯେଉଁଠି ମୂଳଧନ = P, ସୁଧର ହାର = R%, ସମୟ = n ବର୍ଷ

...........ସୂତ୍ର (I)

ମନେରଖ : ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ (C.I.) = ସମୂଳ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ (A) – ମୂଳଧନ (P)

ବିଶେଷ ସୂଚନା : ଯେଉଁଠି ସୁଧ ହିସାବର ସମୟ ଦିଆଯାଇ ନଥାଏ ସେଠାରେ ସୁଧ ହିସାବ ସମୟ ଏକ ବର୍ଷ ବୋଲି ନିଆଯାଏ । ସୁଧ ହିସାବ ସମୟକୁ ସୁଧ ଦେୟ ସମୟ ମଧ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ–2: 1000 ଟଙ୍କାର 10% ହାରରେ 3 ବର୍ଷରେ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । (ସୁଧ ଦେୟ ସମୟ 1 ବର୍ଷ)

ସମାଧାନ :– ମୂଳଧନ (P) = 1000 ଟଙ୍କା, ସୁଧର ହାର (R%) = 10%, ସମୟ (n) = 3 ବର୍ଷ

ସମୂଳ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ $(A) = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$ ....ସୂତ୍ର (I)

$$= 1000\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = 1000\left(\frac{11}{10}\right)^3 = \frac{1000 \times 1331}{1000} = 1331 \text{ଟଙ୍କା}$$

ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ = A – P = 1331 ଟଙ୍କା – 1000 ଟଙ୍କା = 331 ଟଙ୍କା

∴ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧର ପରିମାଣ 331.00 ଟଙ୍କା (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ–3 : ଶତକଡ଼ା 5 ହାରରେ 800 ଟଙ୍କାର 3 ବର୍ଷର ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମୂଳଧନ (P) = 800 ଟଙ୍କା, ସୁଧର ହାର = R% = 5% ଏବଂ ସମୟ = n = 3 ବର୍ଷ ।

ସମୂଳ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ $(A) = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n = 800\left(1+\frac{5}{100}\right)^3 = 800\left(\frac{21}{20}\right)^3 = \frac{800 \times 9261}{8000} =$ ଟ.926.10ପ

∴ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ = ସମୂଳ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି – ମୂଳଧନ = (926.10 – 800) ଟଙ୍କା = 126.10 ଟଙ୍କା (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 4 : ଶତକଡ଼ା 12% ହାରରେ କେତେ ବର୍ଷ ପାଇଁ 5400 ଟଙ୍କା ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ରେ ରଖିଲେ ସମୂଳ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ଟ.6773.76 ପଇସା ହେବ ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ମୂଳଧନ = P = 5400 ଟଙ୍କା

ସମୂଳଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି (A) = 6773.76 ଟଙ୍କା, ସୁଧର ହାର (R%) = 12%, ସମୟ = (n) ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ହେବ ।

ଆମେ ଜାଣୁ, $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n \Rightarrow 6773.76 = 5400\left(1+\frac{12}{100}\right)^n$

$$\Rightarrow \frac{6773.76}{5400} = \left(1+\frac{3}{25}\right)^n \Rightarrow \frac{677376}{540000} = \left(\frac{28}{25}\right)^n \Rightarrow \frac{784}{625} = \left(\frac{28}{25}\right)^n$$

$\Rightarrow \left(\frac{28}{25}\right)^n = \left(\frac{28}{25}\right)^2 \Rightarrow n = 2$ ବର୍ଷ (ଉତ୍ତର)

$\therefore$ ବ୍ୟାଙ୍କରେ 5400 ଟଙ୍କା 2ବର୍ଷ ପାଇଁ ଜମା ରଖିଲେ 2 ବର୍ଷ ଶେଷରେ ଟ.6773.76 ପାଇବା । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 5 : ଗୋଟିଏ ଗ୍ରାମର ଲୋକସଂଖ୍ୟା 8000 । ପ୍ରତିବର୍ଷ ଲୋକସଂଖ୍ୟା 10% ହାରରେ ବୃଦ୍ଧି ପାଇଲେ 3 ବର୍ଷ ପରେ ସେହି ଗ୍ରାମର ଲୋକସଂଖ୍ୟା କେତେ ହେବ ?

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ଲୋକସଂଖ୍ୟା (P) = 8000

ବାର୍ଷିକ ବୃଦ୍ଧିର ହାର (R%) = 10%, ସମୟ (n) = 3 ବର୍ଷ ।

ତିନି ବର୍ଷ ପରେ ଗ୍ରାମର ଲୋକସଂଖ୍ୟା (A) = $P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$$A = 8000\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = 8000\left(\frac{11}{10}\right)^3 = \frac{8000 \times 1331}{1000} = 10{,}648$$

$\therefore$ 3 ବର୍ଷ ପରେ ଉକ୍ତ ଗ୍ରାମର ଲୋକସଂଖ୍ୟା 10,648 ହେବ । (ଉତ୍ତର)

8.4.2 ସୁଧଦେୟ ସମୟ ଷାଣ୍ମାସିକ ଅଥବା ତ୍ରୈମାସିକ ଅବଧି ନିମିତ୍ତ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ:

ଆସ, ଦେଖିବା, ବାର୍ଷିକ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ଓ ଅର୍ଦ୍ଧବାର୍ଷିକ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧିରେ କି ପ୍ରକାର ପାର୍ଥକ୍ୟ ଅଛି ? ବାର୍ଷିକ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମକୁ ବର୍ଷକ ପରେ ସୁଧକୁ ମୂଳ ସହିତ ମିଶାଇବାକୁ ହୁଏ । ଅର୍ଦ୍ଧବାର୍ଷିକ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରତି ଛଅମାସ ପରେ ସୁଧକୁ ମୂଳଧନ ସହ ମିଶାଯାଇ ନୂତନ ମୂଳଧନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ।

ଅର୍ଥାତ୍ ଯେତେବେଳେ ସୁଧର ଦେୟ ସମୟ 6 ମାସ ହେବ, ତୁମକୁ ଏକବର୍ଷରେ ଦୁଇଥର ସୁଧ ହିସାବ କରିବାକୁ ହେବ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସୁଧର ହାର ଅଧା ହେଲାବେଳେ, ସମୟ ଦ୍ୱିଗୁଣ ହେବ । ସେହିପରି ସୁଧ ଦେୟ ସମୟ 3 ମାସ ହେଲେ ସୁଧର ହାର ଏକ ଚତୁର୍ଥାଂଶ ଏବଂ ସମୟ ଚାରିଗୁଣ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ- 6 : ସୁଧର ଦେୟ 6 ମାସ ହେଲେ 2048 ଟଙ୍କାର $12\frac{1}{2}\%$ ହାରରେ $1\frac{1}{2}$ ବର୍ଷର ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ବାର୍ଷିକ ସୁଧର ହାର $12\frac{1}{2}\%$ ହେଲେ 6 ମାସର ସୁଧହାର = $6\frac{1}{4}\%$ ହେବ ।

$1\frac{1}{2}$ ବର୍ଷ = 18 ମାସ = 3 ଟି 6 ମାସିଆ ଦେୟ । ।

ମୂଳଧନ (P) = 2048 ଟଙ୍କା, ସୁଧର ହାର = $6\frac{1}{4}\%$, ସମୟ (n) = 3 (ପ୍ରତି 6 ମାସ ଏକକ ସମୟ)

ସମୂଳ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ (A) = $P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n = 2048\left(1+\frac{25}{400}\right)^3$

$= 2048\left(\frac{17}{16}\right)^3 = 2048 \times \frac{4913}{4096}$ = ଟ2456.50ପ.

$\therefore$ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ = A – P = 2456.50 ଟଙ୍କା – 2048.00 ଟଙ୍କା = 408.50 ଟଙ୍କା ।

ଉଦାହରଣ -7 : ସୁଧର ଦେୟ 3 ମାସ ହେଲେ 240000 ଟଙ୍କାର 10% ହାରରେ 9 ମାସର ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମୂଳଧନ (P) = 240000 ଟଙ୍କା, ସମୟ 9 ମାସ = 3 ତିନି ମାସ; ଅର୍ଥାତ୍ n = 3

3 ମାସର ସୁଧର ହାର = $\left(\frac{10}{4}\right)\% = 2\frac{1}{2}\%$ (ଏଠାରେ ବାର୍ଷିକ ସୁଧର ହାରର ଏକ ଚତୁର୍ଥାଂଶ ହେବ)

ସମୂଳ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି (A) = $P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n = 240000\left(1+\frac{5}{200}\right)^3$

$= 240000 \times \left(1+\frac{1}{40}\right)^3 = 240000 \times \left(\frac{41}{40}\right)^3$

$= 240000 \times \frac{41}{40} \times \frac{41}{40} \times \frac{41}{40} = \frac{1033815}{4}$ = 258453.75 ଟଙ୍କା (ଉତ୍ତର)

8.4.3 ମୂଲ୍ୟର ଚକ୍ରହ୍ରାସ ହିସାବ :

କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବସ୍ତୁ; ଯଥା– ମଟରଗାଡ଼ି, ସ୍କୁଟର, ଘର, .. ଆଦି ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇ ଯେତିକି ଯେତିକି ପୁରୁଣା ହୁଏ, ତା'ର ଦାମ୍ ସେତିକି ସେତିକି କମିଯାଏ । ଅନେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏହି ମୂଲ୍ୟ ହ୍ରାସ (Depreciation) ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ହାରରେ ହୁଏ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅବଧି (term) ର ମୂଲ୍ୟ ହ୍ରାସ ପରେ ହ୍ରାସପ୍ରାପ୍ତ ମୂଲ୍ୟ ଉପରେ ହିଁ ପରବର୍ତ୍ତୀ ହ୍ରାସ ଘଟେ । ଏହି ମୂଲ୍ୟ ହ୍ରାସକୁ **ଚକ୍ରହ୍ରାସ** କୁହାଯାଏ ।

ଏହି ହିସାବ ପାଇଁ ସୂତ୍ରଟି ହେଲା,

ହ୍ରାସପ୍ରାପ୍ତ ମୂଲ୍ୟ(A) = $P\left(1-\frac{R}{100}\right)^n$ [P=ସାମଗ୍ରୀର ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ମୂଲ୍ୟ, R% = ହ୍ରାସର ହାର, ସମୟ = n]

ଉଦାହରଣ - 8 : ଗୋଟିଏ ଗାଡ଼ିର ମୂଲ୍ୟ 16,000 ଟଙ୍କା । ଗାଡ଼ିଟି ବ୍ୟବହାର ହେଉଥିଲେ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ ପ୍ରତିବର୍ଷ 5% ହାରରେ ହ୍ରାସପ୍ରାପ୍ତ ହୁଏ । 3 ବର୍ଷ ପରେ ଏହାର ଦାମ୍ କେତେ ହେବ , ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ମୂଲ୍ୟ (P) = 16,000.00 ଟଙ୍କା ।

ହାର (R%) = 5%, ସମୟ (n) = 3 ବର୍ଷ ।

ତିନି ବର୍ଷ ପରେ ଏହାର ଦାମ୍ (A) = $P\left(1-\frac{R}{100}\right)^n = 16,000\left(1-\frac{5}{100}\right)^3$

$$= 16,000 \times \left(\frac{19}{20}\right)^3 = \frac{16000 \times 6859}{8000} = 13718.00$$ ଟଙ୍କା

ତିନି ବର୍ଷ ପରେ ଗାଡ଼ିର ହ୍ରାସପ୍ରାପ୍ତ ମୂଲ୍ୟ 13718.00 ଟଙ୍କା ହେବ । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ – 8 (c)

1. 800 ଟଙ୍କାର 8% ହାରରେ ଦୁଇବର୍ଷର ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
2. 1500 ଟଙ୍କାର 7% ହାରରେ ଦୁଇବର୍ଷର ସମୂଳ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
3. 5000 ଟଙ୍କାର 10% ହାରରେ 3 ବର୍ଷର ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
4. 8000 ଟଙ୍କାର 5% ହାରରେ 3 ବର୍ଷର ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ଏକ ଧାନବୁଣା ଯନ୍ତ୍ର ପାଇଁ 10% ସୁଧ ହାରରେ ବ୍ୟାଙ୍କରୁ 5000 ଟଙ୍କା ଋଣ କଲେ । 3 ବର୍ଷ ପରେ ସେ କେତେ ଟଙ୍କା ଦେଇ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ରୁ ଋଣମୁକ୍ତ ହେବେ ?
6. କମଳା ଗୋଟିଏ ସ୍କୁଟର କିଣିବା ପାଇଁ ବ୍ୟାଙ୍କରୁ 26,400 ଟଙ୍କା 15% ବାର୍ଷିକ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧିରେ ଆଣିଲା । 2 ବର୍ଷ 4ମାସ ପରେ କେତେ ଟଙ୍କା ବ୍ୟାଙ୍କକୁ ଦେଇ ଋଣମୁକ୍ତ ହେବ ?

   (ସୂଚନା: A = 2 ବର୍ଷର ସମୂଳ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ + A ର $\frac{4}{12}$ ବର୍ଷର ସରଳ ସୁଧ)
7. ବାର୍ଷିକ 4% ହାରରେ 6250.00 ଟଙ୍କା କେତେ ବର୍ଷ ପାଇଁ ବ୍ୟାଙ୍କରେ ଜମା ଦେଲେ 510 ଟଙ୍କା ସୁଧ ମିଳିବ ?
8. କୌଣସି ମୂଳଧନର 5% ହାରରେ 3 ବର୍ଷର ସରଳସୁଧ 540 ଟଙ୍କା । ସେହି ମୂଳଧନର ସମାନ ସୁଧ ହାରରେ ଓ ସମାନ ସମୟରେ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ କେତେ ହେବ ?
9. କୌଣସି ମୂଳଧନର 10% ହାରରେ 3 ବର୍ଷରେ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ଓ ସରଳ ସୁଧର ପାର୍ଥକ୍ୟ ଟ.93.00 । ମୂଳଧନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
10. ସୁଧ 6 ମାସ ଅନ୍ତରରେ ଦେୟ ବାର୍ଷିକ 12.5%ହାରରେ 2560 ଟଙ୍କାର $1\frac{1}{2}$ ବର୍ଷର ସମୂଳ ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. ସୁଧ 6 ମାସ ଅନ୍ତରରେ ଦେୟ ବାର୍ଷିକ 14% ହାରରେ 5000 ଟଙ୍କାର $1\frac{1}{2}$ ବର୍ଷର ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ସୁଧ 4 ମାସ ଅନ୍ତରରେ ଦେୟ ସର୍ତ୍ତରେ ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ବାର୍ଷିକ 10% ହାରରେ 1 ବର୍ଷର ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧ ନର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

13. ଗୋଟିଏ ଘରର ମୂଲ୍ୟ 2,00,000 ଟଙ୍କା । ପ୍ରତିବର୍ଷ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ 6% ହାରରେ ହ୍ରାସ ପାଏ । ତେବେ 3 ବର୍ଷ ପରେ ଏହାର ହ୍ରାସପ୍ରାପ୍ତ ମୂଲ୍ୟ କେତେ ହେବ ?

14. ଗୋଟିଏ ଗ୍ରାମର ଲୋକସଂଖ୍ୟା 20,000 । ପ୍ରତିବର୍ଷ ଏହାର ଲୋକ ସଂଖ୍ୟା 7% ବୃଦ୍ଧି ପାଇଲେ ଦୁଇ ବର୍ଷପରେ ଲୋକସଂଖ୍ୟା କେତେ ହେବ ?

15. ଗୋଟିଏ ମଟର ସାଇକେଲର କ୍ରୟ ମୂଲ୍ୟ ଟ.42,000 । ପ୍ରତିବର୍ଷ ପରେ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ 8% ହାରରେ ହ୍ରାସ ପାଏ । ତେବେ 2 ବର୍ଷ ପରେ ମଟର ସାଇକେଲ ମୂଲ୍ୟ କେତେ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8.5 ଜୀବନ ଧାରଣର ମୂଲ୍ୟସୂଚୀ (Cost of living index) :

ଜିନିଷପତ୍ରର ଦରଦାମ୍ ସହ ଆମେ ସମସ୍ତେ ପରିଚିତ । ବିଭିନ୍ନ କାରଣରୁ ଦିନକୁ ଦିନ ଜିନିଷପତ୍ରର ଦାମ୍‌ରେ ବୃଦ୍ଧି ଘଟୁଛି । ଫଳରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ନାଗରିକ ଉପରେ ଜୀବନଧାରଣ ବ୍ୟୟଭାର ବଢ଼ି ବଢ଼ି ଚାଲିଛି । ତେଣୁ ଏକ ସମୟରୁ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟକୁ ବିଭିନ୍ନ ବ୍ୟବହାର୍ଯ୍ୟ ଜିନିଷର ଦରବୃଦ୍ଧିକୁ ବିଚାରକୁ ନେଇ ଜୀବନଧାରଣର ବ୍ୟୟଭାର କେତେ ବୃଦ୍ଧି ହେଲା ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକତା ରହିଛି । ଏହି ବ୍ୟୟଭାର ବୃଦ୍ଧିକୁ ଆମେ ଏକ ସୂଚକାଙ୍କ **(Index Number)** ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରିଥାଉ ।

8.5.1 ସୂଚକାଙ୍କ (Index Number)

ସୂଚକାଙ୍କ ଜରିଆରେ ସାଧାରଣତଃ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ସମୟ ମଧ୍ୟରେ ନିତ୍ୟ ବ୍ୟବହାର୍ଯ୍ୟ ସାମଗ୍ରୀ ତଥା କୃଷିଜାତ ପଦାର୍ଥ, ଶିଳ୍ପଜାତ ଦ୍ରବ୍ୟ ଇତ୍ୟାଦିର ଦର (ମୂଲ୍ୟ) ରେ ହ୍ରାସ ବା ବୃଦ୍ଧି (Price levels) ସୂଚାଯାଇଥାଏ ।

ସୂଚକାଙ୍କ ମୁଖ୍ୟତଃ ତିନି ପ୍ରକାର:-

(i) ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ (Price index number)

(ii) ପରିମାଣାତ୍ମକ ସୂଚକାଙ୍କ (Quantity index number)

(iii) ଜୀବନ ଧାରଣର ମୂଲ୍ୟସୂଚକାଙ୍କ (Cost of living index number)

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ କେବଳ ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

8.5.2 ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ (Cost of living index number) :

ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବର୍ଗ (Category) ର ଲୋକମାନଙ୍କ ପାଇଁ ବିଭିନ୍ନ ସମୟ ତଥା ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ସ୍ଥାନରେ ମୂଲ୍ୟସ୍ତରରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ (Change in price level) ପରିପ୍ରକାଶ ନିମିତ୍ତ ଯେଉଁ ସାଂଖ୍ୟିକ ମାନ (Numerical Value) ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ, ତାହାକୁ **ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ** କୁହାଯାଏ ।

ଏକ ସାଧାରଣ ମଧ୍ୟବିତ୍ତ ପରିବାରର କେତେଗୁଡ଼ିଏ ନିତ୍ୟବ୍ୟବହାର୍ଯ୍ୟ ଜିନିଷ ପାଇଁ ମାସିକ ଖର୍ଚ୍ଚର ତୁଳନା ପାଇଁ 1994 ଏବଂ 2006 ଦୁଇଟି ବର୍ଷକୁ ସ୍ଥିର କରାଯାଉ । ଏଠାରେ 1994 ରେ ହୋଇଥିବା ସମୁଦାୟ ମାସିକ ଖର୍ଚ୍ଚ ସହ 2006 ରେ ସେହି ସେହି ଜିନିଷ ବାବଦରେ ସମୁଦାୟ ମାସିକ ଖର୍ଚ୍ଚ ସହ ତୁଳନା କରିବା ।

ଆମେ ଯେଉଁ ସମୟର ଦରଦାମ୍ ବା ଖର୍ଚ୍ଚ ସହିତ ଉପସ୍ଥିତ ଦରଦାମକୁ ତୁଳନା କରିବା, ସେହି ସମୟ (ବର୍ଷ)କୁ **ମୂଳବର୍ଷ (Base year)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏଠାରେ 2006 କୁ **ଚଳିତ ବର୍ଷ (Current year)** କୁହାଯିବ ।

ମନେକର ମୂଳବର୍ଷରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ 100.00 ଟଙ୍କା ଏବଂ ଚଳିତ ବର୍ଷରେ ସେହି ସେହି ସାମଗ୍ରୀରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ 146.00 ଟଙ୍କା ।

ଏଠାରେ ମୂଳବର୍ଷ 1994 ତୁଳନାରେ ଚଳିତ ବର୍ଷ 2006 ରେ ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ 146 । ଏଠାରେ 1994 ଓ 2006 ବର୍ଷରେ ଥିବା **ପରିବର୍ତ୍ତିତ ମୂଲ୍ୟସ୍ତର (changed price level)** କୁ 146 ସଂଖ୍ୟା ମାଧ୍ୟମରେ ସ୍ଥିର କରାଗଲା ।

ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ ପ୍ରକାଶ କରିବାକୁ ଗଲେ 1994 ମୂଳବର୍ଷରେ (ନିତ୍ୟବ୍ୟବହାର୍ଯ୍ୟ ବସ୍ତୁ ପାଇଁ) ପ୍ରତି 100 ଟଙ୍କା ଖର୍ଚ୍ଚ କରୁଥିବା ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ମଧ୍ୟବିତ୍ତ ପରିବାରକୁ 2006 ଚଳିତ ବର୍ଷରେ 146 ଟଙ୍କା ଖର୍ଚ୍ଚ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ ।

ତେଣୁ 1994 କୁ ମୂଳ ବର୍ଷ ରୂପେ ନେଇ 2006 ବର୍ଷରେ ଜୀବନଧାରଣର ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ

$$= \frac{\text{2006 ବର୍ଷରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ}}{\text{1994 ବର୍ଷରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ}} \times 100$$

$$\text{ଅର୍ଥାତ୍ ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ} = \frac{\text{ଚଳିତ ବର୍ଷରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ}}{\text{ମୂଳବର୍ଷରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ}} \times 100$$

8.5.3 ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ସ୍ଥିର କରିବାର ପଦ୍ଧତି (Method for cost of living index):

ପ୍ରଥମେ ଏକ ସମୟ ସ୍ଥିର କରିବା (ମୂଳବର୍ଷ) ଯେଉଁ ସମୟର ଦରଦାମ୍ ସହିତ ଚଳିତ ବର୍ଷର ଦରଦାମକୁ ତୁଳନା କରାଯିବ ।

ଦ୍ୱିତୀୟରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବ୍ୟବହାର୍ଯ୍ୟ ବସ୍ତୁର ମୂଳବର୍ଷରେ ଦାମ୍ ଓ ବର୍ତ୍ତମାନର ଦାମ୍ ସଂଗ୍ରହ କରାଯିବ ।

ତୃତୀୟରେ ଜୀବନଧାରଣ ଲାଗି କେଉଁ ବସ୍ତୁକୁ କେତେ ପରିମାଣରେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଛି ତାହା ସ୍ଥିର କରାଯିବ ।

ମନେକର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବସ୍ତୁପାଇଁ p_0: ମୂଳବର୍ଷରେ ବସ୍ତୁର ଦାମ୍,
p_1: ବସ୍ତୁର ଚଳିତ ବର୍ଷର ଦାମ୍
w: ବସ୍ତୁର ପରିମାଣ ହୁଏ,

$$\text{ତେବେ ଜୀବନଧାରଣର ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ} = \frac{\Sigma wp_1}{\Sigma wp_0} \times 100$$

ଯେଉଁଠାରେ $\Sigma wp_1 =$ ଚଳିତ ବର୍ଷରେ ସମସ୍ତ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ଏବଂ
$\Sigma wp_0 =$ ମୂଳବର୍ଷରେ ସମସ୍ତ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି

8.5.4 ଜୀବନଧାରଣର ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କର ବ୍ୟବହାର (Uses of cost of living Index Number):

(1) ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ବିଭିନ୍ନ ସାମଗ୍ରୀ ଗୁଡ଼ିକର ଖୁଚୁରା ଦର (Retail price) ରେ ପରିବର୍ତ୍ତନର ସୂଚନା ଦେବା ସହ ମୂଳବର୍ଷ ତୁଳନାରେ ସାମଗ୍ରୀ ଗୁଡ଼ିକର ମହରଗ ପରିମାଣ ବଢୁଛି କିମ୍ବା କମୁଛି ତାହା ମଧ୍ୟ ସୂଚାଇବାରେ ସାହାଯ୍ୟ କରେ ।

(2) ସରକାରଙ୍କୁ ଦୈନିକ ମଜୁରି (Wage), ବସ୍ତୁର ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ମୂଲ୍ୟ (price), ବସ୍ତୁ ଉପରେ କର (tax)ଇତ୍ୟାଦି ସ୍ଥିର କରିବାରେ ସାହାଯ୍ୟ କରେ ।

(3) ସରକାରୀ କର୍ମଚାରୀଙ୍କ ପାଇଁ ମହଙ୍ଗା ଭତ୍ତା (Dearness Allowance) ଏବଂ ବାର୍ଷିକ ବୋନସ୍ (Bonus) ପ୍ରଭୃତି ସ୍ଥିର କରାଇବାରେ ସାହାଯ୍ୟ କରେ ।

ଉଦାହରଣ – 1 : ଏକ ସାଧାରଣ ପରିବାରର କେତେକ ବ୍ୟବହାର୍ଯ୍ୟ ବସ୍ତୁର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରିମାଣ ଉପରେ 2007 ମସିହାରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ ଥିଲା 8200 ଟଙ୍କା । ଯଦି 2007 କୁ ମୂଳବର୍ଷ ନେଇ 2009 ରେ ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟସୂଚୀର ନିର୍ଦ୍ଦେଶୀ ସଂଖ୍ୟା 140.50 ହୋଇଥାଏ, ତେବେ 2009 ମସିହାରେ ସେହି ପରିମାଣର ବ୍ୟବହାର୍ଯ୍ୟ ବସ୍ତୁ ଉପରେ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ କେତେ ଥିଲା ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ $= \dfrac{\text{2009 ରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ}}{\text{2007 ରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ}} \times 100$

$\Rightarrow 146.50 = \dfrac{\text{2009 ରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ}}{8200} \times 100$

$\Rightarrow$ 2009 ରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ $= 146.50 \times 82 = 12013$ ଟଙ୍କା

$\therefore$ ପରିବାରଟିର 2009 ରେ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ 12013 ଟଙ୍କା (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 2 : ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀରେ 2000 ମସିହା ଆରମ୍ଭରେ ବିଭିନ୍ନ ବସ୍ତୁର ଦାମ୍ ଓ 2009 ମସିହା ଆରମ୍ଭରେ ସେହି ବସ୍ତୁମାନଙ୍କର ଦାମ୍ ସହ ସେହି ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକୁ କେତେ ପରିମାଣରେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ତାହା ଦିଆଯାଇଛି । 2000 ମସିହାକୁ ମୂଳବର୍ଷ ନେଇ 2009 ମସିହା ଆରମ୍ଭରେ ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ସ୍ଥିର କର ।

ବସ୍ତୁର ନାମ	ବସ୍ତୁର ପରିମାଣ (w)	2000ରେ ଏକକ ପ୍ରତି ଦାମ୍ (p_0)	2009ରେ ଏକକ ପ୍ରତି ଦାମ୍ (p_1)
ଚାଉଳ	40 କିଲୋ	ଟ.6.00	ଟ.12.00
ଖାଇବା ତେଲ	5 ଲିଟର	ଟ.32.00	ଟ.60
ଚିନି	7 କିଲୋ	ଟ.16.00	ଟ.35.00
କ୍ଷୀର	15 ଲିଟର	ଟ. 6.00	ଟ.10.00
ମାଂସ	4 କିଲୋ	ଟ.120.00	ଟ.200

ସମାଧାନ :

ବସ୍ତୁର ନାମ	w	p_0	wp_0	p_1	wp_1
ଚାଉଳ	40 କିଲୋ	ଟ.6.00	ଟ.240.00	ଟ.12.00	ଟ.480.00
ଖାଇବାତେଲ	5 ଲିଟର	ଟ.32.00	ଟ.160.00	ଟ.60.00	ଟ.300.00
ଚିନି	7 କିଲୋ	ଟ.16.00	ଟ.112.00	ଟ.35.00	ଟ.245.00
କ୍ଷୀର	15 ଲିଟର	ଟ.6.00	ଟ. 90.00	ଟ10.00	ଟ150.00
ମାଂସ	4 କିଲୋ	ଟ.120.00	ଟ.480.00	ଟ.200.00	ଟ800.00

$\Sigma wp_0 = 1082$ଟଙ୍କା $\Sigma wp_1 = 1975$ଟଙ୍କା

ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ $= \dfrac{\Sigma wp_1}{\Sigma wp_0} = \dfrac{1975 \times 100}{1082} = 182.5$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 3 : ନିମ୍ନ ସାରଣୀର ତଥ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସାମଗ୍ରୀ	ଆବଶ୍ୟକତା ପରିମାଣ (କି.ଗ୍ରା.ରେ)	କି.ଗ୍ରା. ପିଛା ଦର (ଟଙ୍କାରେ)	
		2000 ମସିହାରେ	2004 ମସିହାରେ
ଗହମ	15	6.00	8.50
ଚିନି	5	12.50	15.00
ଚାଉଳ	7	18.00	20.00
ଚା	0.5	85.00	90.00
ଡାଲି	2.5	22.00	25.00

ସମାଧାନ :

ସାମଗ୍ରୀ	ସାମଗ୍ରୀର ପରିମାଣ (କି.ଗ୍ରା.ରେ)	2000 ରେ ଦର (ଟଙ୍କାରେ)	ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚ (2000 ରେ)	2004 ରେ ଦର (ଟଙ୍କାରେ)	ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚ (2004ରେ)
ଗହମ	15	6.00	90.00	8.50	127.50
ଚିନି	5	12.50	62.50	15.00	75.00
ଚାଉଳ	7	18.00	126.00	20.00	140.00
ଚା	0.5	85.00	42.50	90.00	45.00
ଡାଲି	2.5	22.00	55.00	25.00	62.50
			376.00		450.00

2000 କୁ ମୂଳବର୍ଷ ରୂପେ ନେଇ

$$2004\ (\text{ଚଳିତବର୍ଷ})\ \text{ରେ ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ} = \frac{2004\ \text{ରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ}}{2000\ \text{ରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ}} \times 100$$

$$= \frac{450.00}{376.00} \times 100 = 119.68 = 119.7\ (\text{ପ୍ରାୟ})\quad (\text{ଉତ୍ତର})$$

ବିଶେଷ ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

2000କୁ ମୂଳବର୍ଷ ରୂପେ ନେଇ 2004 ରେ ଜୀବଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ଅନ୍ୟ ଅର୍ଥରେ ବସ୍ତୁର ମୂଲ୍ୟ (Price of the commodities) ରେ 19.7% (ଶତକଡ଼ା19.7) ଅଭିବୃଦ୍ଧି ଘଟିଛି ବୋଲି କହିବାକୁ ପଡ଼ିବ ।

ନିଜେ କର

1. ଏକ ରାଜମିସ୍ତ୍ରୀର ଦୈନିକ ମଜୁରି 2000 ମସିହାରେ 125 ଟଙ୍କା ଥିଲା । 2009 ମସିହାରେ ଦୈନିକ ମଜୁରି 250 ଟଙ୍କା ଥିଲା । ତେବେ 2009 ମସିହାରେ ଜୀବନଧାରଣର ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
2. ଜୀବନଧାରଣର ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ଏକ ସଂଖ୍ୟା କାହିଁକି ? ଉଦାହରଣ ସହ ବୁଝାଇ ଲେଖ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 8 (d)

1. ଏକ ସାଧାରଣ ପରିବାରର କେତେକ ବ୍ୟବହାର୍ଯ୍ୟ ବସ୍ତୁର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରିମାଣ ଉପରେ 2003 ମସିହାରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ ଥିଲା 8000 ଟଙ୍କା । ଯଦି 2003 କୁ ମୂଳବର୍ଷ ନେଇ 2010ରେ ଜୀବନ ଧାରଣର ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ 132.8 ହୋଇଥାଏ, ତେବେ 2010 ମସିହାରେ ସେହି ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ବ୍ୟବହାର୍ଯ୍ୟ ବସ୍ତୁ ଉପରେ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ କେତେ ଥିଲା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଗୋଟିଏ ପରିବାରର 2002 ମସିହାରେ ଚିନି ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ 145 ଟଙ୍କା ଥିଲା ଓ 2008 ରେ ଚିନି ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ 210 ଟଙ୍କା ହେଲେ 2002 କୁ ମୂଳବର୍ଷ ନେଇ 2008 ରେ ଜୀବନଧାରଣର ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଏକ ପରିବାରର କେତେକ ବ୍ୟବହାର୍ଯ୍ୟ ବସ୍ତୁର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରିମାଣ ଉପରେ 2007 ମସିହାରେ ସମୁଦାୟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ ଟ. 18,900.00ପ ଥିଲା । 2000 କୁ ମୂଳବର୍ଷ ନେଇ 2007 ରେ ଜୀବନଧାରଣର ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ 210 ହେଲେ 2000 ମସିହାରେ ସେହି ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ବ୍ୟବହାର୍ଯ୍ୟ ବସ୍ତୁ ଉପରେ ମୋଟ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ କେତେ ଥିଲା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟରୁ 2001 କୁ ମୂଳବର୍ଷ ନେଇ 2005 ମସିହାରେ ଜୀବନଧାରଣର ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ସ୍ଥିର କର ।

ସାମଗ୍ରୀ	ପରିମାଣ (କି.ଗ୍ରା.ରେ)	ପ୍ରତି ଏକକ ପିଛା ଦର (ଟଙ୍କାରେ)	
		2001 ରେ	2005 ରେ
A	100	6.00	12.00
B	10	8.00	8.00
C	16	5.00	6.50
D	20	40.00	55.00
E	45	15.00	20.00
F	20	20.00	25.00

5. ଏକ ସାଧାରଣ ପରିବାରର ବିଭିନ୍ନ ବ୍ୟବହାର୍ଯ୍ୟ ବସ୍ତୁର ଆବଶ୍ୟକତା ପରିମାଣ ଓ ସେଗୁଡ଼ିକର 1998 ଓ 2006 ରେ ସେଗୁଡ଼ିକର ମୂଲ୍ୟ ଦିଆଯାଇଛି । 1998 କୁ ମୂଳବର୍ଷ ରୂପେ ନେଇ 2006 ରେ ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ କେତେ ଥିଲା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସାମଗ୍ରୀର ନାମ	ଆବଶ୍ୟକତା ପରିମାଣ	1998 ରେ ସାମଗ୍ରୀର ଦର	2006 ରେ ସାମଗ୍ରୀର ଦର
ଚାଉଳ	40 କିଲୋ	ଟ.2.78	ଟ.3.50
ଆଳୁ	35 କିଲୋ	ଟ.2.00	ଟ.3.00
ଚା	1 କିଲୋ	ଟ.25.00	ଟ.32.00
ଚିନି	10 କିଲୋ	ଟ.5.40	ଟ.6.50
ତେଲ	2 ଲିଟର	ଟ.48.00	ଟ.58.00

6. ନିମ୍ନ ସାରଣୀର ତଥ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ବର୍ତ୍ତମାନ ସମୟରେ ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସାମଗ୍ରୀ	ଆବଶ୍ୟକତା ପରିମାଣ	ମୂଳବର୍ଷରେ ଦର	ବର୍ତ୍ତମାନର ଦର
ଚାଉଳ	30 କିଲୋ	ଟ.3.00	ଟ.14.50
ଡାଲି	5 କିଲୋ	ଟ.8.00	ଟ.32.00
ତେଲ	8 ଲିଟର	ଟ.16.00	ଟ.46.00
ଚିନି	4 କିଲୋ	ଟ.4.50	ଟ.18.00
କ୍ଷୀର	20 ଲିଟର	ଟ.300	ଟ.14.00
ମାଂସ	3 କିଲୋ	ଟ.25.00	ଟ.110.00

7. ନିମ୍ନ ସାରଣୀର ତଥ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଜୀବନ ଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସାମଗ୍ରୀ	ଆବଶ୍ୟକତା ପରିମାଣ	ମୂଳବର୍ଷରେ ଦର	ବର୍ତ୍ତମାନ ଦର
ଚାଉଳ	10 କିଲୋ	ଟ.9.50	ଟ.14.00
ଡାଲି	2 କିଲୋ	ଟ.27.00	ଟ.32.00
ପରିବା	12 କିଲୋ	ଟ.4.00	ଟ.6.00
ତେଲ	4 ଲିଟର	ଟ.32.00	ଟ.46.50
ମସଲା	500 ଗ୍ରାମ୍	ଟ.48.00	ଟ.60.00
ଜାଳେଣି	8 କିଲୋ	ଟ.12.25	ଟ.19.00

8. ଏକ ମଧ୍ୟବିତ୍ତ ପରିବାର 1985 ଏବଂ 1995 ରେ ଜୀବନଧାରଣ ନିମନ୍ତେ ବ୍ୟବହାର କରୁଥିବା ବିଭିନ୍ନ ବସ୍ତୁର ଆପେକ୍ଷିକ ଆବଶ୍ୟକତା ପରିମାଣ (ଶତକଡ଼ାରେ ପ୍ରକାଶିତ) ଓ ସେଗୁଡ଼ିକ ପାଇବା ନିମନ୍ତେ ଏକକ ପ୍ରତି ଦାମ୍ ନିମ୍ନରେ ଥିବା ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । 1985 କୁ ମୂଳବର୍ଷ ରୂପେ ନେଇ 1995 ରେ ମଧ୍ୟବିତ୍ତ ପରିବାର ଲାଗି ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ବିଭିନ୍ନ ସାମଗ୍ରୀର ପରିମାଣ	ଖାଦ୍ୟ 50%	ପୋଷାକ 10%	ଯାତାୟାତ ଖର୍ଚ୍ଚ 10%	ଘରଭଡ଼ା 20%	ଅନ୍ୟାନ୍ୟ 10%
1985 ରେ ଏକକ ପ୍ରତି ଦାମ୍	240	30	60	100	40
1995 ରେ ଏକକ ପ୍ରତି ଦାମ୍	280	35	80	120	85

ସୂଚନା : ଖାଦ୍ୟ = 50% = 0.5 ଏକକ
ପୋଷାକ = 10% = 0.10 ଏକକ
ଯାତାୟତ ଖର୍ଚ୍ଚ = 10% = 0.10 ଏକକ
ଘରଭଡ଼ା = 20% = 0.20 ଏକକ
ଅନ୍ୟାନ୍ୟ = 10% = 0.10 ଏକକ

ପ୍ରତ୍ୟେକ ସାମଗ୍ରୀ ଲାଗି ହେଉଥିବା ମୋଟ ଖର୍ଚ୍ଚ (ଟଙ୍କାରେ) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ସାରିବା ପରେ ସେଗୁଡ଼ିକ ଏକତ୍ର କରି Σwp_0 ଏବଂ Σwp_1 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯିବ ।

9. ନିମ୍ନସାରଣୀରେ ଗୋଟିଏ ପରିବାରର ଖର୍ଚ୍ଚ 1995 ମସିହା ଓ 2000 ମସିହାରେ ଏକକ ପ୍ରତି ଦର ଦିଆଯାଇଛି । 1995 କୁ ମୂଳବର୍ଷ ନେଇ 2000 ରେ ପରିବାର ଲାଗି ଜୀବନଧାରଣ ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ବିଭିନ୍ନ ସାମଗ୍ରୀର ପରିମାଣ	ଖାଦ୍ୟ 40%	ଜାଳେଣି 10%	ପୋଷାକ 20%	ଘରଭଡ଼ା 20%	ଅନ୍ୟାନ୍ୟ 10%
1995 ରେ ଏକକ ପ୍ରତି ଦାମ୍	ଟ.140.00	ଟ.20.00	ଟ.60.00	ଟ.50.00	ଟ.30.00
2000 ରେ ଏକକ ପ୍ରତି ଦାମ୍	ଟ. 165.00	ଟ.23.00	ଟ.70.00	ଟ.80.00	ଟ.35.00

10. ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କରି 2003 କୁ ମୂଳବର୍ଷ ନେଇ 2009 ରେ ଜୀବନ ଧାରଣର ମୂଲ୍ୟ ସୂଚକାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସାମଗ୍ରୀ	ପରିମାଣ କି.ଗ୍ରା.ରେ	ମୂଲ୍ୟ ଟଙ୍କାରେ	
		2003 ରେ	2009 ରେ
A	10	7.00	10.00
B	15	12.00	20.00
C	8	25.00	25.00
D	25	12.00	20.00
E	5	50.00	60.00

8.6 ବ୍ୟାଙ୍କ କାରବାର (Banking)

ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଏକ ଆର୍ଥିକ ଅନୁଷ୍ଠାନ ଯେଉଁଠି ଟଙ୍କା ଦେଣ ନେଣ ହୁଏ । ଏଠାରେ ଟଙ୍କା ଜମାହୁଏ ଓ ଋଣ ଦିଆଯାଏ । ମୂଲ୍ୟବାନ କାଗଜପତ୍ର, ହୀରା, ସୁନା ଇତ୍ୟାଦି ମୂଲ୍ୟବାନ ପଦାର୍ଥର ସୁରକ୍ଷା ପାଇଁ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ର ସାହାଯ୍ୟ ନିଆଯାଇଥାଏ । ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ରେ ପଇସା ଜମା ରଖିଲେ ବ୍ୟାଙ୍କ ତରଫରୁ କିଛି ସୁଧ ମିଳେ । ବ୍ୟାଙ୍କରୁ ଋଣ ନେଲେ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌କୁ କିଛି ସୁଧ ଦେବାକୁ ପଡ଼େ । ମାତ୍ର ଟଙ୍କା ଜମାରଖିଲେ ଯେଉଁ ହାରରେ ସୁଧ ମିଳେ, ଟଙ୍କା ଋଣ ଆଣିଲେ ବ୍ୟାଙ୍କକୁ ତା ଠାରୁ ଅଧିକ ହାରରେ ସୁଧ ଦେବାକୁ ପଡ଼େ ।

ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ର ଇତିହାସ ଅର୍ଥର ଅଭିବୃଦ୍ଧି ସହିତ ନିବିଡ଼ ଭାବରେ ସଂପୃକ୍ତ । ପୂର୍ବକାଳରେ ସାଧାରଣ ଲୋକ ତା'ର ସଞ୍ଚିତ ଧନକୁ ସମାଜର ଏକ ବଳବାନ୍ ଲୋକ ଦାୟିତ୍ୱରେ ରଖୁଥିଲା, ଯିଏ ସେହି ସଞ୍ଚିତ ଅର୍ଥକୁ ଆବଶ୍ୟକ କରୁଥିବା ଲୋକକୁ ଅଧିକ ସୁଧରେ ଋଣ ଦେଉଥିଲା । କାଳକ୍ରମେ ସେମାନେ ସାଧାରଣ ଲୋକଙ୍କ ଠାରୁ କମ୍ ସୁଧ ହାରରେ ଟଙ୍କା ଜମା ଗ୍ରହଣ କଲେ ଏବଂ ଅଧିକ ସୁଧ ହାରରେ ଋଣ ଦେବାକୁ ଲାଗିଲେ । ସେହି ବଳବାନ୍ ଲୋକଙ୍କର ଅନୁଷ୍ଠାନକୁ ଘରୋଇ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ କୁହାଗଲା । 1974 ମସିହାରେ ଭାରତ ସରକାର 14ଟି ବ୍ୟାଙ୍କକୁ ଜାତୀୟକରଣ କରିଦେଲେ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଦେଶରେ ଥିବା ପ୍ରାୟ ସମସ୍ତ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଜାତୀୟକରଣ ବ୍ୟାଙ୍କ ଅଟନ୍ତି । ଜାତୀୟକରଣ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ରିଜର୍ଭ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ର ନିର୍ଦ୍ଦେଶରେ କାର୍ଯ୍ୟ କରନ୍ତି ।

ବ୍ୟାଙ୍କର କାର୍ଯ୍ୟ :

ବ୍ୟାଙ୍କର ବହୁବିଧ କାର୍ଯ୍ୟ ମଧ୍ୟରୁ କେତେକ କାର୍ଯ୍ୟକୁ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା :

(i) ଜମା ପାଇଁ ଟଙ୍କା ଗ୍ରହଣ କରିବା;

(ii) ଆବଶ୍ୟକ ବେଳେ ଟଙ୍କା ପ୍ରଦାନ କରିବା;

(iii) ଜମା ଟଙ୍କା ଉପରେ ସୁଧ ପ୍ରଦାନ କରିବା;

(iv) ଟଙ୍କା ଜମାକାରୀଙ୍କୁ ଅଗ୍ରୀମ ଋଣ ପ୍ରଦାନ କରିବା;

(v) ସୁରକ୍ଷା ବଣ୍ଡଗୁଡ଼ିକର କ୍ରୟ ଓ ବିକ୍ରୟ କରିବା;

(iv) ଲକର୍‌କୁ ଭଡ଼ା ସୂତ୍ରରେ ଦେଇ ମୂଲ୍ୟବାନ ପଦାର୍ଥଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଗାଇବା;

(vii) ଭ୍ରମଣକାରୀ ବା ପର୍ଯ୍ୟଟକଙ୍କୁ ଭ୍ରମଣ ଚେକ୍ ଅଥବା ବିଦେଶୀ ଚେକ୍ ଓ ବିଦେଶୀ ମୁଦ୍ରା ବିନିମୟରେ ନଗଦ ଟଙ୍କା ପ୍ରଦାନ କରିବା;

(ix) ଚାଷୀ, ଦୋକାନୀ, ଶିକ୍ଷିତ ବେକାରୀ ଓ ଆର୍ଥିକ ଦୁର୍ବଳ ଲୋକଙ୍କୁ ଋଣ ପ୍ରଦାନ କରି ସେମାନଙ୍କ ଆର୍ଥିକ ସ୍ଥିତିକୁ ମଜଭୁତ୍ କରିବା;

(x) ସ୍କୁଲ୍ ଦରମା, ପାଣି, ଇଲେକ୍‌ଟ୍ରିକ୍ ଓ ଟେଲିଫୋନ୍ ବିଲ୍, ଘରଭଡ଼ା, ଆୟକର ଟିକସ୍, ଋଣର କିସ୍ତି ଇତ୍ୟାଦି ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ଗ୍ରହଣ କରିବା ଏବଂ

(xi) ସରକାରୀ ଚାକିରିଆଙ୍କ ବେତନ ଓ ପେନସନ୍‌ଭୋଗୀଙ୍କୁ ପେନସନ୍ ପ୍ରଦାନ କରିବା ଇତ୍ୟାଦି ।

ବ୍ୟାଙ୍କରେ ଟଙ୍କା ମୁଖ୍ୟତଃ ପାଞ୍ଚ ପ୍ରକାରର ଆକାଉଣ୍ଟରେ ରଖାଯାଏ ।

(କ) ଚଳନ୍ତି ଆକାଉଣ୍ଟ (Current Account)

(ଖ) ସଞ୍ଚୟ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଆକାଉଣ୍ଟ (Savings Bank Account)

(ଗ) ମିଆଦୀଜମା ଆକାଉଣ୍ଟ (Term Deposit Account)

(ଘ) ପୌନଃପୁନିକ ଜମା ଆକାଉଣ୍ଟ (Recurring Deposit Account)

(ଙ) ନାବାଳକ କିମ୍ବା ନାବାଳିକାଙ୍କ ପାଇଁ ଆକାଉଣ୍ଟ (Accounts for minors)

ଡାକଘରମାନଙ୍କରେ ଚଳିତ ଆକାଉଣ୍ଟ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ଚାରୋଟି ଆକାଉଣ୍ଟର ପ୍ରଚଳନ କରାଯାଏ ।

ଚଳନ୍ତି ଆକାଉଣ୍ଟ : ବଡ଼ ବଡ଼ ବ୍ୟବସାୟୀ, କମ୍ପାନୀମାନେ ସାଧାରଣତଃ ଚଳନ୍ତି ଆକାଉଣ୍ଟ ଖୋଲିଥାଆନ୍ତି । ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ପ୍ରଦତ୍ତ ଚେକ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ଏହି ବ୍ୟବସାୟୀ ଓ କମ୍ପାନୀମାନେ କାରବାର କରିଥା'ନ୍ତି । ଏହି ଆକାଉଣ୍ଟରେ ଜମାଥିବା ଟଙ୍କା ପାଇଁ ବ୍ୟାଙ୍କ କିଛି ସୁଧ ଦିଏ ନାହିଁ, କିନ୍ତୁ ତା' ପରିବର୍ତ୍ତେ କେତେକ ସୁବିଧା ଯୋଗାଇଥାଏ । ଆକାଉଣ୍ଟଧାରୀ ଚାହିଁଲେ ଦିନକୁ ଯେତେଥର ଟଙ୍କା ଜମା କରି ପାରିବେ ଅଥବା ଟଙ୍କା ଉଠାଇପାରିବେ ।

ସଞ୍ଚୟ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଆକାଉଣ୍ଟ : ବେତନଧାରୀ, ସ୍ୱଳ୍ପ ଓ ମଧ୍ୟମ ଆୟକାରୀ ବ୍ୟକ୍ତି ବିଶେଷ ସାଧାରଣତଃ ସଞ୍ଚୟ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଆକାଉଣ୍ଟ ଖୋଲିଥା'ନ୍ତି । ଏହି ଆକାଉଣ୍ଟର ମୁଖ୍ୟ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ହେଲା ସ୍ୱଳ୍ପ ଓ ମଧ୍ୟମ ଆୟକାରୀ ଲୋକମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସଞ୍ଚୟର ଅଭ୍ୟାସକୁ ବଢ଼ାଇବା ପାଇଁ ପ୍ରୋତ୍ସାହନ ପ୍ରଦାନ କରିବା । ସଞ୍ଚୟ ବ୍ୟାଙ୍କ ଆକାଉଣ୍ଟ ସବୁଠାରୁ ଲୋକପ୍ରିୟ ଆକାଉଣ୍ଟ । ଯେକୌଣସି ବ୍ୟକ୍ତି ସର୍ବନିମ୍ନ 100 ଟଙ୍କା ଦେଇ ଯେକୌଣସି ବ୍ୟାଙ୍କରେ (ଷ୍ଟେଟ୍‌ବ୍ୟାଙ୍କରେ 500 ଟଙ୍କା) ଏକ ଆକାଉଣ୍ଟ ଖୋଲି ପାରିବେ । ସବୁସମୟ ପାଇଁ ଅତିକମ୍‌ରେ ଆକାଉଣ୍ଟରେ 100 ଟଙ୍କା ରହିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

8.6.1 ବ୍ୟାଙ୍କରେ ଆକାଉଣ୍ଟ ଖୋଲାଯିବାର ଉପାୟ :

ବ୍ୟାଙ୍କରେ ଏକ ଆକାଉଣ୍ଟ ଖୋଲିବା ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ଫର୍ମ ପୂରଣ କରିବାକୁ ହୁଏ । ସେହି ଫର୍ମରେ ଆକାଉଣ୍ଟଧାରୀ ଓ ଆକାଉଣ୍ଟଧାରୀଙ୍କୁ ପରିଚୟ କରାଇଦେଇଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିର ଠିକଣା ସହିତ ଜମାକାରୀର ନମୁନା ଦସ୍ତଖତ ଥାଏ । ତା' ବ୍ୟତୀତ ପାସ୍‌ପୋର୍ଟ ସାଇଜ୍‌ର ଫଟୋଗ୍ରାଫ୍, ଭୋଟର ପରିଚୟ ପତ୍ର ବା ପାନ୍ (PAN - Permanent Account Number) କାର୍ଡ଼ର ଜେରକ୍ସ ଦେବାକୁ ପଡ଼େ ।

ଆକାଉଣ୍ଟ ଖୋଲାହେଲା ପରେ ଆକାଉଣ୍ଟଧାରୀଙ୍କୁ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ତରଫରୁ ଏକ ପାସ୍‌ବହି ଯୋଗାଇ ଦିଆଯାଏ । ଯେକୌଣସି କାର୍ଯ୍ୟ ଦିବସରେ ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ସମୟ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌କୁ ଯାଇ ଆକାଉଣ୍ଟଧାରୀ ଯେତେ ଟଙ୍କା ଜମା କରିପାରନ୍ତି ବା ଜମାଥିବା ଟଙ୍କାକୁ ଉଠାଇ ପାରନ୍ତି । ସଞ୍ଚୟ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ରୁ ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ବା ଜମା କରିବା ପାଇଁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫର୍ମ ପୂରଣ କରିବାକୁ ପଡ଼େ । ସେହି ଫର୍ମଗୁଡ଼ିକ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ରେ ମିଳେ । ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ପାଇଁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫର୍ମ ବ୍ୟତୀତ ଆକାଉଣ୍ଟଧାରୀଙ୍କୁ ଏକ ଚେକ୍ ବହି ଯୋଗାଇ ଦିଆଯାଏ । ଚେକ୍ ବ୍ୟବହାର କରିବାକୁ ହେଲେ ଷ୍ଟେଟ୍‌ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଆକାଉଣ୍ଟରେ ଅତିକମ୍‌ରେ 500 ଟଙ୍କା ରହିବା ଦରକାର ଏବଂ ଷ୍ଟେଟ୍‌ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଆକାଉଣ୍ଟରେ ଅତିକମ୍‌ରେ 1000 ଟଙ୍କା ରହିବା ଦରକାର ।

ଡାକଘରେ ମଧ୍ୟ ଯେକୌଣସି ବ୍ୟକ୍ତି ଏକ ସଞ୍ଚୟ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଆକାଉଣ୍ଟ ଖୋଲି ପାରିବେ ।

ପାସ୍‌ବୁକ୍‌ର ଏକ ପୃଷ୍ଠାର ନମୁନା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା :

Date ତାରିଖ	Particulars ବିବରଣୀ	Cheque No. ଚେକ୍ ନଂ	Amount withdrawn Rs. P. ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ଟ. ପ.	Amount Deposited Rs. P. ଟଙ୍କା ରଖିବା ଟ. ପ.	Balance Rs. P. ଅବଶେଷ ଟ. ପ.	Initial ହସ୍ତାକ୍ଷର

ମିଆଦୀ ଜମା ଆକାଉଣ୍ଟ :

ଯଦି ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ଟଙ୍କା ଖର୍ଚ୍ଚ ନ କରି ତା'ର ସଞ୍ଚୟକୁ ବଢ଼ାଇବାକୁ ଚାହେଁ, ତେବେ ସେ ମିଆଦୀ ଜମା ଆକାଉଣ୍ଟରେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟ ସୀମା ପାଇଁ ଟଙ୍କା ଜମା ରଖେ । ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ଅବଧି ମଧ୍ୟରେ ଏହି ଆକାଉଣ୍ଟରୁ ଟଙ୍କା ଉଠାଯାଏ ନାହିଁ । ଏଥିପାଇଁ ପ୍ରଚଳିତ ସୁଧହାର ଠାରୁ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଅଧିକ ସୁଧ ଦେଇଥାଏ । ଯଦି ଆକାଉଣ୍ଟଧାରୀଙ୍କୁ ସମୟସୀମା ପୂର୍ବରୁ ଟଙ୍କା ଉଠାଇବାକୁ ହେଲେ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ରୁ ଅନୁମତି ନେବାକୁ ହୁଏ ଓ ସୁଧର ହାର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୁଧହାର ଠାରୁ କମ୍ ହୁଏ । 2009 ମସିହା ପାଇଁ ଏହି ମିଆଦୀ ଜମା ଅମାନତର ବିଭିନ୍ନ ଅବଧି ପାଇଁ ସୁଧର ହାର ହେଉଛି,

15 ଦିନରୁ 45 ଦିନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସୁଧର ହାର 2.5%
46 ଦିନରୁ 90 ଦିନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସୁଧର ହାର 3.5%
91 ଦିନରୁ 180 ଦିନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସୁଧର ହାର 4.75%
181 ଦିନରୁ 1 ବର୍ଷ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସୁଧର ହାର 5.5%
2 ବର୍ଷରୁ 3 ବର୍ଷ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସୁଧର ହାର 6.5%
3 ବର୍ଷରୁ 5 ବର୍ଷ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସୁଧର ହାର 6.75%
5 ବର୍ଷରୁ 8 ବର୍ଷ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସୁଧର ହାର 7%
8 ବର୍ଷରୁ 10 ବର୍ଷ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସୁଧର ହାର 7.25%

ଏହି ସୁଧର ହାର ଭାରତୀୟ ଷ୍ଟେଟ୍‌ବ୍ୟାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଚଳିତ । ଅନ୍ୟ କେତେକ ବ୍ୟାଙ୍କର ସୁଧହାର ଏହାଠାରୁ କମ୍ ହୋଇପାରେ ।

ପୌନଃପୁନିକ ଜମା ଆକାଉଣ୍ଟ : ପୌନଃପୁନିକ ଜମା ଆକାଉଣ୍ଟ ହେଉଛି ଏକ ପ୍ରକାର ସ୍ଥାୟୀ ଅମାନତ ଆକାଉଣ୍ଟ । ଏହି ଆକାଉଣ୍ଟ ପରିପକ୍ୱ ହେବାପାଇଁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟ ସୀମା (ମନେକର ଏକ ବର୍ଷ) ଧାର୍ଯ୍ୟ କରାଯାଇଥାଏ । ଏହା ସ୍ଥଳ ବିଶେଷରେ 5 ବର୍ଷ, 10 ବର୍ଷ, ମଧ୍ୟ ହୋଇପାରେ । ଏହି ଆକାଉଣ୍ଟରେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରିମାଣର ଟଙ୍କା ପୂର୍ବ ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ସର୍ତ୍ତ ଅନୁସାରେ ପ୍ରତି ମାସରେ, ତିନିମାସରେ ଥରେ, ଛଅମାସରେ ଥରେ ବା ବର୍ଷକୁ ଥରେ ଜମା ଦିଆଯାଇଥାଏ । ପୂର୍ବ ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ଅବଧିପରେ ସମୂଳ ସୁଧ ସହ ପୂରାଟଙ୍କା ଜମାକାରୀକୁ ମିଳିଥାଏ ।

ନାବାଳକ / ନାବାଳିକାଙ୍କ ପାଇଁ ଆକାଉଣ୍ଟ: ନାବାଳକ / ନାବାଳିକାଙ୍କ ପାଇଁ ବ୍ୟାଙ୍କରେ ଆକାଉଣ୍ଟ ଖୋଲାଯାଏ । ସେମାନେ ସାବାଳକ / ସାବାଳିକା ହେବା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ତାଙ୍କ ଅଭିଭାବକଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଆକାଉଣ୍ଟ ଚାଲୁ ରଖାଯାଏ ।

8.6.2 ସଞ୍ଚୟବ୍ୟାଙ୍କ ଆକାଉଣ୍ଟରେ ସୁଧ ହିସାବ:

(i) ପ୍ରତିମାସର 10 ତାରିଖରୁ ସେହିମାସର ଶେଷ ତାରିଖ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆକାଉଣ୍ଟରେ ଥିବା ସର୍ବନିମ୍ନ ଅବଶେଷ ଜମାରାଶି ଉପରେ ସୁଧ ହିସାବ କରାଯାଏ ।

(ii) ସର୍ବନିମ୍ନ ଅବଶେଷ ଜମାରାଶିକୁ 10 ର ଗୁଣିତକ ରୂପେ ନେଇ ହିସାବ କରାଯାଏ । ଯଦି ସର୍ବନିମ୍ନ ଅବଶେଷର ପରିମାଣ 560 ଟଙ୍କାରୁ 565 ଟଙ୍କା ମଧ୍ୟରେ ଥାଏ, ତେବେ ତାହାକୁ 560 ଟଙ୍କା ହିସାବରେ ଗ୍ରହଣ କରାଯିବ ଏବଂ ଯଦି ସର୍ବନିମ୍ନ ଅବଶେଷର ପରିମାଣ 565 ଟଙ୍କାରୁ 570 ଟଙ୍କା ମଧ୍ୟରେ ଥାଏ, ତେବେ ତାହାକୁ 570 ଟଙ୍କା ହିସାବରେ ଗ୍ରହଣ କରାଯିବ । 5 ଟଙ୍କା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଜମାରାଶିରେ କୌଣସି ସୁଧ ମିଳେ ନାହିଁ ।

(iii) ପ୍ରତିମାସର ସର୍ବନିମ୍ନ ଅବଶେଷ ଟଙ୍କାକୁ ନେଇ ମିଶାଇ ସୁଧ ହିସାବ ନିମିତ୍ତ ମୂଳଧନ P ସ୍ଥିର କରାଯିବ ।

(iv) ଉପରୋକ୍ତ ମୂଳଧନ ପାଇଁ 1ମାସକୁ ($\frac{1}{12}$ ବର୍ଷ) ସରଳ ସୁଧ ହିସାବ କରାଯିବ । ସରଳ ସୁଧର ହିସାବ ପାଇଁ $I = \frac{PRT}{100}$ ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରାଯିବ ।

(v) ଯେଉଁ ମାସରେ ଆକାଉଣ୍ଟ ରଦ୍ଦ ହେଲା ସେ ମାସ ପାଇଁ ସୁଧ ହିସାବ କରାଯିବ ନାହିଁ ।

(vi) ଯଦିଓ ପ୍ରତିମାସ ପାଇଁ ସୁଧ ହିସାବ କରାଯାଏ, ତେବେ ବର୍ଷକୁ ଦୁଇଥର ମାର୍ଚ୍ଚ 31 ତାରିଖ ଓ ସେପ୍ଟେମ୍ବର 30 ତାରିଖରେ ଆକାଉଣ୍ଟଧାରୀଙ୍କ ପାସ୍ ବୁକ୍‌ରେ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ତରଫରୁ ସୁଧ ଜମା କରାଯାଏ । କେତେକ ବ୍ୟାଙ୍କରେ ଏହି ସୁଧର ହିସାବ ଜୁନ୍ 30 ତାରିଖ ଓ ଡିସେମ୍ବର 31 ତାରିଖରେ କରାଯାଇଥାଏ ।

ଷ୍ଟେଟ୍‌ବ୍ୟାଙ୍କ ଅଫ୍ ଇଣ୍ଡିଆ ତରଫରୁ ସଞ୍ଚୟ ବ୍ୟାଙ୍କ ଆକାଉଣ୍ଟ୍ ପାଇଁ ସୁଧର ହାର ବାର୍ଷିକ 3.5% ଯାହାକି ବର୍ଷକୁ ଦୁଇଥର ଦିଆଯାଇଥାଏ । ପୋଷ୍ଟ ଅଫିସରେ ସଞ୍ଚୟ ଆକାଉଣ୍ଟ୍ ପାଇଁ ସୁଧର ହାର ମଧ୍ୟ ବାର୍ଷିକ ମଧ୍ୟ 3.5% ।

ଉଦାହରଣ – 1 : ହବିବ୍ ଭାରତୀୟ ଷ୍ଟେଟ୍ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ରେ ତା.2-7-09 ରିଖରେ 500 ଟଙ୍କା ଜମା ଦେଇ ଏକ ଆକାଉଣ୍ଟ ଖୋଲିଲେ । ସେହି ମାସ 9 ତାରିଖରେ ଆଉ 720 ଟଙ୍କା ଜମା ଦେଲେ ଓ 17 ତାରିଖରେ 200 ଟଙ୍କା ଉଠାଇଲେ । ସେହି ମାସ 22 ତାରିଖରେ 100 ଟଙ୍କା ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ରେ ଜମା ଦେଲେ । ତେବେ 2009 ମସିହା ଜୁଲାଇ ମାସ ପାଇଁ ହବିବ୍ କେତେ ଟଙ୍କା ଉପରେ ସୁଧ ପାଇଲେ ?

ସମାଧାନ :

ତାରିଖ	ବିବରଣୀ	ଚେକ୍ ନଂ	ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ଟ. ପ.	ଟଙ୍କା ରଖିବା ଟ. ପ.	ଅବଶେଷ ଟ. ପ.	ହସ୍ତାକ୍ଷର
02.7.09	ଟଙ୍କା ଆକାରରେ			500.00	500.00	
09.7.09	ଟଙ୍କା ଆକାରରେ			720.00	1220.00	
17.7.09	ଚେକ୍ ଆକାରରେ	301	200.00		1020.00	
22.7.09	ଟଙ୍କା ଆକାରରେ			100.00	1120.00	

ଜୁଲାଇ ମାସର 10 ତାରିଖ ଠାରୁ ମାସ ଶେଷ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସର୍ବନିମ୍ନ ଅବଶେଷ ଟଙ୍କା ଟ.1020.00 ।

(କାରଣ ନିୟମ ଅନୁସାରେ 22 ତାରିଖରେ ଜମାରଖିଥିବା ଟଙ୍କା ଉପରେ ସୁଧ ପାଇବେ ନାହିଁ ।)

ଉଦାହରଣ –2: ନମିତା ପଣ୍ଡାଙ୍କର ଗ୍ରାମ୍ୟ ବ୍ୟାଙ୍କରେ ଏକ ସଞ୍ଚୟ ଆକାଉଣ୍ଟ ଅଛି । ଆକାଉଣ୍ଟ ବହିରେ ମେ ଓ ଜୁନ୍ 2006 ମସିହା ପାଇଁ ବିଶଦ ବିବରଣୀ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରର –

ତାରିଖ	ବିବରଣୀ	ଚେକ୍ ନଂ	ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ଟ. ପ.	ଟଙ୍କା ରଖିବା ଟ. ପ.	ଅବଶେଷ ଟ. ପ.	ହସ୍ତାକ୍ଷର
ମେ 3	ଟଙ୍କା ଆକାରରେ			200.00	200.00	
ମେ 8	ଟଙ୍କା ଆକାରରେ			300.00	500.00	
ଜୁନ୍ 1	ଚେକ୍ ଆକାରରେ			2000.00	2500.00	
ଜୁନ୍ 1	ଚେକ୍ ଆକାରରେ		15.00		2485.00	
ଜୁନ୍ 6		501	485.00		2000.00	

ମେ ଓ ଜୁନ୍ ମାସର କେତେ ଟଙ୍କା ପାଇଁ ନମିତା ସୁଧ ପାଇବାକୁ ହକ୍‌ଦାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଯଦି ସୁଧର ହାର ବାର୍ଷିକ 3.5% ହୋଇଥାଏ, ଏବଂସେ ଜୁନ୍ ମାସରେ ତାଙ୍କର ଆକାଉଣ୍ଟ ବନ୍ଦ କରିନଥାନ୍ତି, ତେବେ ମେ ଓ ଜୁନ୍ ଉଭୟ ମାସ ପାଇଁ ସମୁଦାୟ କେତେ ଟଙ୍କା ସୁଧ ପାଇବେ ?

ସମାଧାନ :

ମେ ମାସର 10 ତାରିଖଠାରୁ 31 ତାରିଖ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଅବଶେଷ ଟଙ୍କା ହେଉଛି 500 ଟଙ୍କା, ଏଣୁ ଏହି ଟଙ୍କା ପାଇଁ ସେ ସୁଧ ପାଇବେ । ସେହିପରି ଜୁନ୍ ମାସରପୂର୍ବ ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ସମୟ ପାଇଁ ଅବଶେଷ ଟଙ୍କା ହେଉଛି, 2000 ଟଙ୍କା । ତେଣୁ

ମେ ପାଇଁ ସର୍ବନିମ୍ନ ଅବଶେଷ ଟଙ୍କା = 500 ଟଙ୍କା
ଜୁନ୍ ପାଇଁ ସର୍ବନିମ୍ନ ଅବଶେଷ = 2000 ଟଙ୍କା

ସମୁଦାୟ = 2500 ଟଙ୍କା

ଏହି ମୂଳଧନ 2500 ଟଙ୍କାର ଏକମାସ ପାଇଁ ସୁଧ ହେଉଛି,

ସୁଧ = $\frac{P \times R \times T}{100} = \frac{2500 \times 3.5}{100} \times \frac{1}{12}$ ଟ.= $\frac{875}{12}$ ଟ. = 7.29 ଟ. (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ– 3: ରିଙ୍କୁର ପାସ୍‌ବୁକ୍‌ର ଏକ ଅଂଶ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ହେଲା । ଯଦି ପ୍ରତିବର୍ଷ ମାର୍ଚ୍ଚ 31 ଓ ସେପ୍ଟେମ୍ବର 30 ତାରିଖରେ ସୁଧ ହିସାବ କରାଯାଉଥାଏ,ତେବେ ବାର୍ଷିକ 3.5% ସୁଧର ହାର ହିସାବରେ ସେପ୍ଟେମ୍ବର 30 ତାରିଖରେ ରିଙ୍କୁ କେତେ ଟଙ୍କା ସୁଧ ପାଇବ ?

ତାରିଖ	ବିବରଣୀ	ଚେକ୍ ନଂ	ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ଟ. ପ.	ଟଙ୍କା ରଖିବା ଟ. ପ.	ଅବଶେଷ ଟ. ପ.	ହସ୍ତାକ୍ଷର
ଅପ୍ରେଲ 1	ଅବଶେଷ				2000.00	
ଅପ୍ରେଲ 6	ଟଙ୍କା ଆକାରରେ			600.00	2600.00	
ଅପ୍ରେଲ 16	ଲୋକାଲ୍ ଚେକ୍			1200.00	3800.00	
ମେ 9		108 ପାଇଁ	700.00		3100.00	
ମେ 10	ଟଙ୍କା ଆକାରରେ			800.00	3900.00	
ମେ 12		109 ପାଇଁ	1200.00		2700.00	
ଜୁଲାଇ 10	ଟଙ୍କା ଆକାରରେ			1500.00	4200.00	
ଜୁଲାଇ 19	ନିଜ ପାଇଁ		1000.00		3200.00	
ଜୁଲାଇ 30		110 ପାଇଁ	600.00		2600.00	

ସମାଧାନ :

ଅପ୍ରେଲ ମାସଠାରୁ ସେପ୍ଟେମ୍ବର ମାସ ପାଇଁ ସର୍ବନିମ୍ନ ଅବଶେଷ ଜମା ଟଙ୍କା ଏହିପରି

ଅପ୍ରେଲ ଟ. 2600.00
ମେ ଟ. 2700.00
ଜୁନ୍ ଟ. 2700.00 ($\because$ ଜୁନ୍ ମାସରେ ଟଙ୍କା ଉଠାଯାଇ ନାହିଁ କିମ୍ବା ଜମା ଦିଆ ହୋଇନାହିଁ)
ଜୁଲାଇ ଟ. 2600.00
ଅଗଷ୍ଟ ଟ. 2600.00 ($\because$ ଅଗଷ୍ଟରେ ସେହି ଟଙ୍କା ଜମା ରହିଛି)
ସେପ୍ଟେମ୍ବର ଟ. 2600.00 ($\because$ ସେପ୍ଟେମ୍ବରରେ ମଧ୍ୟ ସେତିକି ଟଙ୍କା ଜମା ରହିଛି)

ଟ. 15,800.00

ଟ. 15,800.00 କୁ ମୂଳଧନ ହିସାବରେ ଏକ ମାସ ପାଇଁ ବାର୍ଷିକ 3.5% ହିସାବରେ ସୁଧ ହିସାବ କରିବା ଅର୍ଥାତ୍

ଏଠାରେ ମୂଳଧନ = 15,800.00ଟ. ସୁଧର ହାର = ବାର୍ଷିକ 3.5%, ସମୟ T = 1 ମାସ = $\frac{1}{12}$ ବର୍ଷ

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସୁଧ = $\frac{P \times R \times T}{100} = \frac{15800 \times 3.5 \times 1}{100 \times 12}$ ଟ.= $\frac{158 \times 3.5}{12}$ ଟ. = ଟ.46.08 (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ– 4 : ସୌରଭ ଷ୍ଟେଟବ୍ୟାଙ୍କରେ 2000 ଟଙ୍କା ଦେଇ 16.1.2007 ରେ ଏକ ସଂଚୟ୍ ବ୍ୟାଙ୍କ ଆକାଉଣ୍ଟ ଖୋଲିଥିଲା । ଉକ୍ତ ବର୍ଷର ଜାନୁୟାରୀଠାରୁ ମାର୍ଚ୍ଚ ମାସ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସେ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ଖୋଲିଥିବା ଆକାଉଣ୍ଟ୍ ସହ ସଂପର୍କ ରଖିଥିଲା ।

24.01.2007 ରେ 875 ଟଙ୍କା ଉଠାଇଥିଲା;
28.01.2007 ରେ 376 ଟଙ୍କା ଜମା ରଖିଥିଲା;
03.02.2007 ରେ 450 ଟଙ୍କା ଜମା ରଖିଥିଲା;
10.02.2007 ରେ 280 ଟଙ୍କା ଉଠାଇଥିଲା ଏବଂ
05.03.2007 ରେ 788 ଟଙ୍କା ଜମା ରଖିଥିଲା ।

ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ଏକ ପାସ୍ ବହିରେ ଲେଖି ମାର୍ଚ୍ଚ ମାସ ଶେଷ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଶତକଡ଼ା 4 ହାର ସୁଧରେ ସୁଧ ହିସାବ କର ।

ସମାଧାନ :

ସୌରଭ ପାସ୍ ବହିର ଏକ ପୃଷ୍ଠା :

ତାରିଖ	ବିବରଣୀ	ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ଟ. ପ.	ଟଙ୍କା ରଖିବା ଟ. ପ.	ଅବଶେଷ ଟ. ପ.	ହସ୍ତାକ୍ଷର
16.1.2007	ଟଙ୍କା ଜମା		2000.00	2000.00	
24.1.2007	ନିଜ ପାଇଁ	875.00		1125.00	
28.1.2007	ଟଙ୍କା ଜମା		376.00	1501.00	
3.2.2007	ଟଙ୍କା ଜମା		450.00	1951.00	
10.2.2007	ଚେକ୍‌ରେ	280.00		1671.00	
5.3.2007	ଟଙ୍କା ଜମା		788.00	2459.00	

ଜାନୁଆରୀ ମାସ ପାଇଁ ସର୍ବନିମ୍ନ ଅବଶେଷ ଟଙ୍କା	0.00	0.00
ଫେବୃୟାରୀ ମାସ ପାଇଁ ସର୍ବନିମ୍ନ ଅବଶେଷ ଟଙ୍କା	1671.00	1670.00
ମାର୍ଚ୍ଚ ମାସ ପାଇଁ ସର୍ବନିମ୍ନ ଅବଶେଷ ଟଙ୍କା	2459.00	2460.00
ସର୍ବନିମ୍ନ ଅବଶେଷ ଟଙ୍କା (P)		4130.00

∴ ମୂଳଧନ (P) = ଟ. 4130.00

ସମୟ (T) = 1 ମାସ = $\frac{1}{12}$ ବର୍ଷ

ଶତକଡ଼ା ସୁଧର ହାର (R%) = 4% = $\frac{4}{100}$

$$\therefore \text{ସୁଧ} = \frac{4130 \times 4 \times \frac{1}{12}}{100} \text{ ଟଙ୍କା} = \frac{4130 \times 4}{12 \times 100} = \text{ଟ. } 13.77$$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 8 (e)

(1 ଠାରୁ 3 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଜାତୀୟକରଣ ବ୍ୟାଙ୍କର ସାହାଯ୍ୟ ନେଇପାର)

1. ସର୍ବନିମ୍ନ କେତେ ଟଙ୍କା ଦେଇ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ରେ ଏକ ଆକାଉଣ୍ଟ ଖୋଲା ଯାଇପାରିବ ?

2. ଚେକ୍ ଦେଇ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ରୁ ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ପରେ ଆକାଉଣ୍ଟରେ ଅତି କମ୍‌ରେ କେତେ ଟଙ୍କାର ରହିବା ଦରକାର ?

3. ବର୍ଷକୁ କେତେ ଥର ସଞ୍ଚୟ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଆକାଉଣ୍ଟ ପାଇଁ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ସୁଧ ହିସାବ କରେ ?

4.(a) ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି 500 ଟଙ୍କା ଦେଇ ଅପ୍ରେଲ 11 ତାରିଖରେ ଏକ ଆକାଉଣ୍ଟ ଖୋଲିଲେ । ଯଦି ଜୁନ୍ ମାସ ଶେଷ ସୁଦ୍ଧା ସେ ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ରୁ ଟଙ୍କା ଉଠାଇ ନ ଥାନ୍ତି ବା ଟଙ୍କା ଜମା ରଖି ନ ଥାନ୍ତି, ତେବେ 6% ସୁଧ ହିସାବରେ ସେ ଜୁନ୍ ମାସ ଶେଷରେ କେତେ ସୁଧ ପାଇବେ ?

(b) ଅରୁଣର ସଂଚୟ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଆକାଉଣ୍ଟରେ ଅଗଷ୍ଟ ମାସ ପାଇଁ ସର୍ବନିମ୍ନ ଅବଶେଷ 5010 ଟଙ୍କା ଥିଲା । ମାତ୍ର ଅରୁଣ ଅଗଷ୍ଟ ମାସ 30 ତାରିଖ ଦିନ ଆକାଉଣ୍ଟ ବନ୍ଦ ପାଇଁ ଦରଖାସ୍ତ କଲା । ତେବେ ଅରୁଣ ଅଗଷ୍ଟ ମାସ ପାଇଁ କେତେ ଟଙ୍କା ଉପରେ ସୁଧ ପାଇବ ?

5. ନମ୍ରତାର ବ୍ୟାଙ୍କ୍‌ରେ ଏକ ସଞ୍ଚୟ ଆକାଉଣ୍ଟ ଅଛି । ଆକାଉଣ୍ଟ ବହିରେ ଥିବା ହିସାବରେ ବିଶଦ ବିବରଣୀ ଏହିପରି –

ତାରିଖ	ବିବରଣୀ	ଚେକ୍ ନଂ	ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ଟ. ପ.	ଟଙ୍କା ରଖିବା ଟ. ପ.	ଅବଶେଷ ଟ. ପ.	ହସ୍ତାକ୍ଷର
ଫେବୃୟାରୀ,19	ଟଙ୍କା ଜମା			1000.00	1000.00	
ଫେବୃୟାରୀ,25	ଟଙ୍କା ଜମା			2000.00	3000.00	
ମାର୍ଚ୍ଚ,1	ଦରମା ଟଙ୍କା			5000.00	8000.00	
ମାର୍ଚ୍ଚ,10		201ପାଇଁ	2000.00		6000.00	
ମାର୍ଚ୍ଚ,27		202 ପାଇଁ	500.00		5500.00	
ଅପ୍ରେଲ,1	ଦରମା ଟଙ୍କା			5000.00	10,500.00	

ଉପରୋକ୍ତ ଜମା ପାଇଁ ବାର୍ଷିକ ସୁଧର ହାର 5% ହେଲେ,

(i) ଫେବୃୟାରୀ ମାସ ପାଇଁ ନମ୍ରତା କେତେ ସୁଧ ପାଇବେ ?

(ii) ମାର୍ଚ୍ଚ ମାସ ପାଇଁ କେତେ ସୁଧ ପାଇବେ ?

(iii) ଅପ୍ରେଲ 21 ତାରିଖରେ ଆକାଉଣ୍ଟ ବନ୍ଦ କରିବାକୁ ନମ୍ରତା ଦରଖାସ୍ତ କଲେ, ସମୁଦାୟ ଜମା ଟଙ୍କା ପାଇଁ ସେ କେତେ ସୁଧ ପାଇବେ ?

6. ହରିର ଏକ ସଞ୍ଚୟ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଆକାଉଣ୍ଟ ଅଛି । 1998 ମସିହା ପାଇଁ ପାସ୍ ବୁକ୍‌ରେ ଥିବା ଟଙ୍କାର ବିଶଦ ବିବରଣୀ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି । ଯଦି ଡିସେମ୍ବର ମାସ ଶେଷରେ ବର୍ଷକୁ ଥରେ ମାତ୍ର 5% ସୁଧରେ ସୁଧ ହିସାବ କରାଯାଏ ତେବେ ହରି 1998 ମସିହା ପାଇଁ କେତେ ସୁଧ ପାଇଲେ, ହିସାବ କର ।

ତାରିଖ	ବିବରଣୀ	ଚେକ୍ ନଂ	ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ଟ. ପ.	ଟଙ୍କା ରଖିବା ଟ. ପ.	ଅବଶେଷ ଟ. ପ.	ହସ୍ତାକ୍ଷର
1998 ଜାନୁୟାରୀ,1	ଅବଶେଷ				2300.00	
ଜାନୁୟାରୀ,25	ଟଙ୍କା ଆକାରରେ			600.00	2900.00	
ମାର୍ଚ୍ଚ,1	ଟଙ୍କା ଆକାରରେ			200.00	3100.00	
ଜୁନ୍,10		302	400.00		2700.00	
ସେପ୍ଟେମ୍ବର,୫		303	600.00		2100.00	
ଡିସେମ୍ବର,23		304	600.00		10500.00	

7. ତୁମେ ଭାରତୀୟ ଷ୍ଟେଟ୍ ବ୍ୟାଙ୍କରେ 500 ଟଙ୍କା ଦେଇ ଜାନୁଆରୀ 5 ତାରିଖରେ ଏକ ସଞ୍ଚୟ ଆକାଉଣ୍ଟ ଖୋଲିଲ । ଜାନୁଆରୀ 12 ତାରିଖରେ ଆଉ 1000 ଟଙ୍କା ଜମା ଦେଲ । ଜାନୁଆରୀ 27 ତାରିଖରେ ଚେକ୍‌ଟିଏ ଦେଇ 300 ଟଙ୍କା ଉଠାଇଲ । ଫେବୃୟାରୀ 10 ତାରିଖରେ 700 ଟଙ୍କା ଜମା ଦେଲ । ମାର୍ଚ୍ଚ 5 ତାରିଖରେ 200 ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ଫର୍ମ ଦେଇ ଟଙ୍କା ଉଠାଇଲ ।

(i) ଉପରୋକ୍ତ ବିଶଦ ବିବରଣୀ କିପରି ପାସ୍‌ବୁକ୍‌ରେ ଲେଖାଯିବ, ଦର୍ଶାଅ ।

(ii) ଯଦି ବାର୍ଷିକ ସୁଧର ହାର 5% ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ମାର୍ଚ୍ଚ ମାସ ଶେଷରେ ତୁମେ କେତେ ଟଙ୍କା ସୁଧ ପାଇବ ?

8. ସଲିମ୍‌ର ଏକ ସଞ୍ଚୟ ବ୍ୟାଙ୍କ୍ ଆକାଉଣ୍ଟ ଅଛି । ପାସ୍‌ବୁକ୍‌ର ଗୋଟିଏ ପୃଷ୍ଠାର ନକଲ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି । ଯଦି ଡିସେମ୍ବର ମାସ ଶେଷରେ ବର୍ଷକୁ ଥରେ ମାତ୍ର 5% ସୁଧରେ ସୁଧ ହିସାବ କରାଯାଏ, ତେବେ ସଲିମ୍ 2001 ମସିହା ପାଇଁ କେତେ ସୁଧ ପାଇଥିବ, ହିସାବ କର ।

ତାରିଖ 2001	ବିବରଣୀ	ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ଟ. ପ.	ଟଙ୍କା ରଖିବା ଟ. ପ.	ଅବଶେଷ ଟ. ପ.	ହସ୍ତାକ୍ଷର
ଜାନୁୟାରୀ,2	ଅବଶେଷ			1250.00	
ଫେବୃୟାରୀ,6	ଚେକ୍ ପାଇଁ	550.00		700.00	
ମାର୍ଚ୍ଚ,3	ଟଙ୍କା ଜମା		2000.00	2700.00	
ମାର୍ଚ୍ଚ,10	ଟଙ୍କା ଜମା		575.00	3275.00	
ନଭେମ୍ବର,4	ଚେକ୍ ପାଇଁ	1500.00		1775.00	
ଡିସେମ୍ବର,4	ଟଙ୍କା ଜମା		3000.00	4775.00	

9. ଗୋଟିଏ ସଞ୍ଚୟ ପାସ୍‌ବୁକ୍‌ର ଏକ ପୃଷ୍ଠାର ନକଲ ଦିଆଯାଇଛି । ଯଦି ଫେବୃୟାରୀ ମାସଠାରୁ ଜୁଲାଇ ମାସ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟକ୍ତିଜଣକ 111.45 ଟଙ୍କା ସୁଧ ପାଇଥାନ୍ତି ତେବେ ଶତକଡ଼ା ସୁଧର ହାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ତାରିଖ (2001)	ବିବରଣୀ	ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ଟ. ପ.	ଟଙ୍କା ରଖିବା ଟ. ପ.	ଅବଶେଷ ଟ. ପ.	ହସ୍ତାକ୍ଷର
ଫେବୃୟାରୀ,୫	ଅବଶେଷ	–	–	8500.00	
ଫେବୃୟାରୀ,12	ନିଜ ପାଇଁ	4000.00		4500.00	
ଏପ୍ରିଲ,12	ଟଙ୍କା ଜମା	–	2238.00	6738.00	
ଜୁନ୍,15	ନିଜ ପାଇଁ	5000.00	–	1738.00	
ଜୁଲାଇ,୫	ଟଙ୍କା ଜମା	–	6000.00	7738.00	

10. କୁଲଦୀପଙ୍କର ସଞ୍ଚୟ ପାସବୁକ୍‌ର ଏକ ପୃଷ୍ଠାର ନକଲ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି । 6% ହାରରେ ଜାନୁଆରୀରୁ ଡିସେମ୍ବର 2000 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସୁଧ ହିସାବ କର ।

ତାରିଖ 2000	ବିବରଣୀ	ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ଟ. ପ.	ଟଙ୍କା ରଖିବା ଟ. ପ.	ଅବଶେଷ ଟ. ପ.	ହସ୍ତାକ୍ଷର
ଜାନୁଆରୀ,1	ଅବଶେଷ			2000.00	
ଫେବୃୟାରୀ,3	ଚେକ୍ ଦ୍ୱାରା		1550.00	3550.00	
ଫେବୃୟାରୀ,10	ଟଙ୍କା ଜମା		2000.00	5500.00	
ଜୁନ୍,17	ଚେକ୍ ପାଇଁ	1000.00		4550.00	
ନଭେମ୍ବର,5	ଟଙ୍କା ଜମା		2525.00	7075.00	
ଡିସେମ୍ବର,6	ଚେକ୍ ପାଇଁ	2500.00		4575.00	

11. ମାନସର ସଂଚୟ ପାସ୍‌ବୁକ୍‌ର ନକଲ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି । 2007 ମସିହା ଜାନୁଆରୀ ମାସ ଠାରୁ 2007 ଜୁନ୍ ମାସ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ 4% ସୁଧ ହାରରେ ସୁଧ ହିସାବ କର ।

ତାରିଖ (2007)	ବିବରଣୀ	ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ଟ. ପ.	ଟଙ୍କା ରଖିବା ଟ. ପ.	ଅବଶେଷ ଟ. ପ.	ହସ୍ତାକ୍ଷର
3.1.2007	ଅବଶେଷ			2642.00	
16.1.2007	ନିଜ ପାଇଁ	640.00		2002.00	
5.3.2007	ଟଙ୍କା ଜମା		850.00	2852.00	
10.4.2007	ନିଜ ପାଇଁ	1130.00		1722.00	
25.4.2007	ଚେକ୍ ଦ୍ୱାରା		650.00	2372.00	
15.6.2007	ଟଙ୍କା ଜମା	577.00		1795.00	

12. ସୌମ୍ୟରଂଜନର ସଂଚୟ ପାସ୍‌ବୁକ୍‌ର ଏକ ପୃଷ୍ଠାର ନକଲ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି । 25.7.2004 ରେ ଆକାଉଣ୍ଟ ରଦ୍ଦ କରି ଟ.6042.45 ପାଇଥିଲା । ତେବେ ଶତକଡ଼ା ସୁଧର ହାର କେତେ ଥିଲା ସ୍ଥିର କର ।

ତାରିଖ 2004	ବିବରଣୀ	ଟଙ୍କା ଉଠାଇବା ଟ. ପ.	ଟଙ୍କା ରଖିବା ଟ. ପ.	ଅବଶେଷ ଟ. ପ.	ହସ୍ତାକ୍ଷର
ଜାନୁୟାରୀ,1	ଅବଶେଷ			8026.15	
ଜାନୁୟାରୀ,5	ଟଙ୍କା ଜମା		650.00	8676.15	
ଫେବୃୟାରୀ,13	ନିଜ ପାଇଁ	2500.00		6176.15	
ଜୁନ୍,04	ଚେକ୍ ଦ୍ୱାରା		385.00	6561.15	
ଜୁଲାଇ,19	ଚେକ୍ ମାଧ୍ୟମରେ	718.50		5842.65	

*****

ଚଳନ (VARIATION)

ଅଧ୍ୟାୟ
9

HFFMUZ

9.1 ଚଳନ (Variation) :

ତୁମେ ତୁମ ପରିବେଶରେ ନାନା ପ୍ରକାର ପରିବର୍ତ୍ତନ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିଥିବ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ – ଗୋଟିଏ ଦିନରେ ବିଭିନ୍ନ ସମୟରେ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଗଛର ଛାଇର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଗୋଟିଏ ସହରର ବିଭିନ୍ନ ସମୟରେ ଜନସଂଖ୍ୟାରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ, ଗୋଟିଏ ଛାତ୍ରର ବୟସ ସହ ତାହାର ଉଚ୍ଚତାରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଇତ୍ୟାଦି । ସେହିପରି ଆବଶ୍ୟକତା ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଗୋଟିଏ ପରିବାରର ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଆଦି ମଧ୍ୟ ତୁମମାନଙ୍କ ଦୃଷ୍ଟିକୁ ଆସିଥିବ । ଆସ ସେଭଳି କେତେକ ପରିସ୍ଥିତି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

9.1.1 ସଳଖ ଚଳନ (Direct Variation) :

ପରିସ୍ଥିତି - 1 :

5 ଲିଟର କ୍ଷୀରର ଦାମ୍ 100 ଟଙ୍କା ହେଲେ, ଦୁଇ ଦିନରେ ଗୋଟିଏ ପରିବାରରେ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବାକୁ ଥିବା 4 ଲିଟର ଓ 6 ଲିଟର କ୍ଷୀରର ଦାମ୍ କେତେ ହେବ ? ଐକିକ ଧାରା ପ୍ରୟୋଗକରି ତୁମେ କହି ପାରିବ – 4 ଲିଟର ଏବଂ 6 ଲିଟର କ୍ଷୀରର ଦାମ୍ ଯଥାକ୍ରମେ 80 ଟଙ୍କା ଓ 120 ଟଙ୍କା ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ କମ୍ ଲିଟର କ୍ଷୀର କିଣିବା ପାଇଁ କମ୍ ମୂଲ୍ୟ ଓ ଅଧିକ ଲିଟର କ୍ଷୀର କିଣିବା ପାଇଁ ଅଧିକ ମୂଲ୍ୟ ଦେବାକୁ ପଡ଼ିବ ।

ନିମ୍ନ ସାରଣୀକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । ସାରଣୀରେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ପରିମାଣ ପାଇଁ କ୍ଷୀରର ଦାମ୍ ଦିଆଯାଇଛି ।

କ୍ଷୀରର ପରିମାଣ (ଲିଟରରେ)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
କ୍ଷୀରର ଦାମ୍ (ଟଙ୍କାରେ)	40	60	80	100	120	140	160	180	200

ଏଠାରେ ଆବଶ୍ୟକତା ଦୃଷ୍ଟିରୁ କ୍ଷୀରର ପରିମାଣ ବୃଦ୍ଧି ପାଇଲେ କ୍ଷୀର ପାଇଁ ଦେବାକୁ ପଡୁଥିବା ମୂଲ୍ୟରେ ଆନୁପାତିକ ଭାବେ ବୃଦ୍ଧି ଘଟୁଛି । ସେହିପରି ଆବଶ୍ୟକତା ଅନୁଯାୟୀ କ୍ଷୀରର ପରିମାଣ କମିଗଲେ ବା ହ୍ରାସ ଘଟିଲେ କ୍ଷୀର ପାଇଁ ଦେବାକୁ ପଡୁଥିବା ମୂଲ୍ୟରେ ଆନୁପାତିକ ଭାବେ ହ୍ରାସ ଘଟୁଛି ।

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ଆବଶ୍ୟକ କ୍ଷୀରର ପରିମାଣ ଉପରେ କ୍ଷୀର ପାଇଁ ଦେବାକୁ ପଡୁଥିବା ଟଙ୍କାର ପରିମାଣ ନିର୍ଭର କରୁଥିବାରୁ ଉଭୟକୁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ **'ଚଳରାଶି'** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଗୋଟିକର ପରିବର୍ତ୍ତନ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରି ଅନ୍ୟଟିର ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେଉଛି । ରାଶିଦ୍ୱୟର ଏଭଳି ପରିବର୍ତ୍ତନକୁ **'ଚଳନ'** କୁହାଯାଏ ।

ପରିସ୍ଥିତି - 2 :

ସେହିପରି ଅନ୍ୟ ଏକ ପରିସ୍ଥିତି କଥା ଆଲୋଚନା କରିବା । ତୁମେ ବଜାରକୁ ନଡ଼ିଆ କିଣିବାକୁ ଗଲ । ଦୋକାନୀ 4ଟି ନଡ଼ିଆର ମୂଲ୍ୟ 32 ଟଙ୍କା କହିଲା । ସେହି ଦାମ୍‌ରେ ଯଦି ତୁମେ ଏକା ପ୍ରକାର ନଡ଼ିଆ 2ଟି କିଣିବ ତେବେ ତୁମକୁ 16 ଟଙ୍କା ଦେବାକୁ ପଡ଼ିବ କିମ୍ବା 5ଟି ନଡ଼ିଆ କିଣିଲେ ମୂଲ୍ୟ ବାବଦରେ ଦୋକାନୀକୁ 40 ଟଙ୍କା ଦେବାକୁ ପଡ଼ିବ । ଅର୍ଥାତ୍ କମ୍ ସଂଖ୍ୟକ ନଡ଼ିଆ ପାଇଁ କମ୍ ମୂଲ୍ୟ ଓ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ନଡ଼ିଆ ପାଇଁ ଅଧିକ ମୂଲ୍ୟ ଦେବାକୁ ପଡ଼ିଥାଏ ।

ପରିସ୍ଥିତି – 1 ଓ ପରିସ୍ଥିତି –2 କୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କଲେ ଜାଣିବା –

ଦୁଇଟି ରାଶି ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ବୃଦ୍ଧି ଘଟିଲେ ଅନ୍ୟଟିର ବୃଦ୍ଧି ହୁଏ ବା ଗୋଟିକର ହ୍ରାସ ଘଟିଲେ ଅନ୍ୟଟିର ହ୍ରାସ ହୁଏ । ରାଶିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଏ ପ୍ରକାର ସମ୍ବନ୍ଧକୁ **ସଳଖ ଚଳନ** କୁହାଯାଏ ।

ନିମ୍ନ ସାରଣୀକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । (ପରିସ୍ଥିତି –2କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର)

ନଡ଼ିଆର ପରିମାଣ (x)	2	5	6	8	9	10
ନଡ଼ିଆର ମୂଲ୍ୟ (y)	16	40	48	64	72	80
$\frac{x}{y}$ ର ମାନ	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

ଏଠାରେ x ର ମାନ ବୃଦ୍ଧି ପାଇଲେ, y ର ମାନ ବୃଦ୍ଧି ପାଏ । କିମ୍ବା x ର ମାନ ହ୍ରାସ ପାଇଲେ y ର ମାନ ହ୍ରାସ ପାଏ । କିନ୍ତୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ଥଳରେ $\frac{x}{y}$ ର ମାନ ସମାନ ରହେ । ନଡ଼ିଆର ପରିମାଣ x_1 ରୁ x_2 କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ y_1 ରୁ y_2 କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ । ଯେଉଁଠାରେ $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=K$ (ଧ୍ରୁବ ରାଶି)

ସାରଣୀରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $K=\frac{1}{8}$

x ଓ y ର ଏ ପ୍ରକାର ଚଳନକୁ **ସଳଖ ଚଳନ (Direct Variation)** କୁହାଯାଏ ।

ଏହାକୁ ଆମେ ଲେଖିବା $x \propto y$ ଏବଂ ପଢ଼ିବା 'x varies directly as y' ।

ମନେରଖ : $x \propto y \Rightarrow x = Ky \Rightarrow \frac{x}{y} = K$ ଏବଂ $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=K$

ନିଜେ କର

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀକୁ ଦେଖି x ଓ y ଚଳରାଶିଦ୍ୱୟ ସଳଖ ଚଳନରେ ଅଛନ୍ତି କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

(a)

x	20	17	14	11	8	5	2
y	40	34	28	22	16	10	4

(b)

x	6	10	14	18	22	26	30
y	4	8	12	16	20	24	28

(c)

x	5	8	12	15	18	20
y	15	24	36	60	72	100

ସୂଚନା : ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\frac{x}{y}$ ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

2. x ଓ y ଚଳରାଶି ଦ୍ୱୟ ସଳଖ ଚଳନରେ ଥିଲେ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରୁ p ଓ q ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

x	5	P	10
y	8	32	q

ସୂଚନା : $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}=k$ ସୂତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ p ଓ q ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ଉଦାହରଣ– 1 : ଚାଉଳ କିଲୋଗ୍ରାମ୍ ପ୍ରତି 3 ଟଙ୍କା । ପରିବାରର ଲୋକସଂଖ୍ୟା ଅନୁଯାୟୀ ପରିବାରର ମୁଖ୍ୟ ଏକ ସପ୍ତାହ ପାଇଁ ଚାଉଳ କିଣିଲେ । ଚାଉଳ ପରିମାଣ 7 କି.ଗ୍ରା., 14 କି.ଗ୍ରା., 21 କି.ଗ୍ରା. ଓ 28 କି.ଗ୍ରା. କିଣିବା ପାଇଁ କେତେ କେତେ ମୂଲ୍ୟ ଦେବାକୁ ପଡ଼ିବ ?

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଏକ କିଲୋଗ୍ରାମ୍ ଚାଉଳର ମୂଲ୍ୟ 3 ଟଙ୍କା । $\therefore x_1 = 1$ ଓ $y_1 = 3$

ପୁନଶ୍ଚ x_2 ଓ y_2 ର ମୂଲ୍ୟ ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ହେବ ।

ସୂତ୍ର ଅନୁଯାୟୀ $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}$

ଅର୍ଥାତ୍ $x_1y_2 = x_2y_1 \Rightarrow y_2 = \frac{x_2y_1}{x_1} = \frac{7 \times 3}{1} = 21$

$\therefore$ 7 କି.ଗ୍ରା. ଚାଉଳର ମୂଲ୍ୟ 21 ଟଙ୍କା ।

ସୂଚନା : ଚଳନର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି କିଲୋଗ୍ରାମ୍ ପ୍ରତି 3 ଟଙ୍କା ଦରରେ ତୁମେ 14 କି.ଗ୍ରା.,14 କି.ଗ୍ରା., 21 କି.ଗ୍ରା. ଓ 28 କି.ଗ୍ରା. ଚାଉଳର ମୂଲ୍ୟ ସ୍ଥିର କରିପାରିବ । ନିମ୍ନ ସାରଣୀର ସାହାଯ୍ୟ ନିଅ ।

ଚାଉଳର ପରିମାଣ (x) (କି.ଗ୍ରା.ରେ)	1	7	14	21	28
ଚାଉଳର ମୂଲ୍ୟ (y) (ଟଙ୍କାରେ)	3	21	42	63	84
$\frac{x}{y}$ ର ମାନ	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$

ଉଦାହରଣ - 2: 3 ମିଟର ସାର୍ଟ କନାର ଦାମ୍ 63 ଟଙ୍କା ହେଲେ, ସେହି କନାରୁ 4 ମିଟର, 6 ମିଟର କନା ଆଣିଲେ କନା ପାଇଁ କେତେ ଟଙ୍କା ଦେବାକୁ ହେବ ?

ସମାଧାନ : (i) 3 ମିଟର କନାର ଦାମ୍ 63 ଟଙ୍କା । (x = କନାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, y = କନାର ମୂଲ୍ୟ)

$x_1 = 3$ ଓ $y_1 = 63$ ଏବଂ $x_2 = 4$ ହେଲେ y_2 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ଚଳନ ସୂତ୍ର ଅନୁଯାୟୀ : $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$ ବା $y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1} = \frac{4 \times 63}{3} = 84$

$\therefore$ 4 ମିଟର ସାର୍ଟ କନାର ଦାମ୍ 84 ଟଙ୍କା ।

(ii) ସେହିପରି $x_1 = 3, y_1 = 63, x_2 = 6$ ହେଲେ y_2 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ଚଳନ ସୂତ୍ର ଅନୁଯାୟୀ : $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1} = \frac{6 \times 63}{3} = 126$

$\therefore$ 6 ମିଟର ସାର୍ଟ କନାର ଦାମ୍ 126 ଟଙ୍କା ହେବ ।

(iii) $x_1 = 3, y_1 = 63, x_2 = 8$ ହେଲେ y_2 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ଚଳନସୂତ୍ର ଅନୁଯାୟୀ : $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \Rightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Rightarrow y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1} = \frac{8 \times 63}{3} = 168$

$\therefore$ 8 ମିଟର ସାର୍ଟ କନାର ଦାମ୍ 168 ଟଙ୍କା ହେବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 9(a)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ଯେପରି $\frac{x}{y} = k$ (ସ୍ଥିରାଙ୍କ) ଏବଂ $k = \frac{1}{2}$

କମଳାର ସଂଖ୍ୟା (x)	5			9			7	
କମଳାର ମୂଲ୍ୟ ଟଙ୍କାରେ (y)	10	16	8		36	20		26

2. ଚଳନ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗରେ ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(a) 3 ଟି କଞ୍ଚା କଦଳୀର ଦାମ୍ 15 ଟଙ୍କା ହେଲେ,

(i) 12 ଟି କଞ୍ଚା କଦଳୀର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ? (ii) 25 ଟଙ୍କାରେ କେତୋଟି କଦଳୀ ମିଳିବ ?

(b) ଜଣେ ଶ୍ରମିକର ଦୈନିକ ମଜୁରି 140 ଟଙ୍କା ହେଲେ,

(i) ତାହାର 5 ଦିନର ମଜୁରି କେତେ ?

(ii) 840 ଟଙ୍କା ମଜୁରି ପାଇଁ ସେ କେତେ ଦିନ କାମ କରିବ ?

3. ସମାନ ଆକାରର 3 ଟି ମହମବତୀର ଦାମ୍ 24 ଟଙ୍କା ହେଲେ, 120 ଟଙ୍କାରେ ସେହି ଆକାରର କେତୋଟି ମହମବତୀ ମିଳିବ ?

4. 6 ଟି ଖାତାର ମୂଲ୍ୟ 90 ଟଙ୍କା । ସେହି ଆକାରର 15 ଟି ଖାତାର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ? 75 ଟଙ୍କାରେ କେତୋଟି ଖାତା ମିଳିବ ?

5. ବଜାରରେ 2 କି.ଗ୍ରା. ଆଳୁର ଦାମ୍ 9 ଟଙ୍କା । ତେବେ 5 କି.ଗ୍ରା. ଆଳୁର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ? 27 ଟଙ୍କାରେ କେତେ ପରିମାଣ ଆଳୁ ମିଳିବ ?

6. ଗୋଟିଏ ସ୍କୁଟର 3 ଘଣ୍ଟାରେ 120 କି.ମି. ବାଟ ଯାଇପାରେ । ସେହି ବେଗରେ 8 ଘଣ୍ଟାରେ କେତେ ବାଟ ଯିବ ଏବଂ ସେହି ବେଗରେ 200 କି.ମି. ବାଟ ଯିବାକୁ କେତେ ସମୟ ଲାଗିବ ?

7. କୁକୁଡ଼ା ଅଣ୍ଡା ଡଜନ 15 ଟଙ୍କା ହେଲେ, 6 ଟି ଅଣ୍ଡାର ଦାମ୍ କେତେ ? 10 ଟଙ୍କାରେ କେତୋଟି ଅଣ୍ଡା ମିଳିବ ?

8. 15 କି.ମି. ବସ୍‌ରେ ଯିବା ପାଇଁ 2 ଟଙ୍କା 25 ପଇସା ଭଡ଼ା ଲାଗେ । ସେହି ବସ୍‌ରେ 80 କି.ମି. ବାଟ ଯିବାକୁ କେତେ ଭଡ଼ା ପଡ଼ିବ ?

9. ଗୋଟିଏ ସ୍କୁଟର 45 କି.ମି. ବାଟ ଯିବାରେ 1 ଲିଟର ପେଟ୍ରୋଲ୍ ଆବଶ୍ୟକ କରେ । ସେହି ସ୍କୁଟରରେ 225 କି.ମି. ବାଟ ଯିବାକୁ କେତେ ପେଟ୍ରୋଲ୍ ଆବଶ୍ୟକ ?

10. ଗୋଟିଏ ପରିବାରର ଏକ ସପ୍ତାହର ଖାଇବା ଖର୍ଚ୍ଚ 1050 ଟଙ୍କା । ଉକ୍ତ ପରିବାରର ସଦସ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ, 2009 ମସିହା ଫେବୃୟାରୀ ମାସର ଖାଇବା ଖର୍ଚ୍ଚ କେତେ ହେବ ?

11. 5 ଲିଟର ଖାଇବା ତେଲର ମୂଲ୍ୟ 300 ଟଙ୍କା ହେଲେ, ମାସକୁ 12 ଲିଟର ତେଲ ଖର୍ଚ୍ଚ କରୁଥିବା ଛାତ୍ରାବାସର ମାସିକ ତେଲ ବାବଦରେ କେତେ ଖର୍ଚ୍ଚ ଦେବାକୁ ପଡ଼ିବ ?

12. 50 ଟି ଖବର କାଗଜ ବିକିଲେ ଜଣେ ବିକ୍ରେତା 18 ଟଙ୍କା କମିଶନ୍ ପାଆନ୍ତି । ସେ କେତୋଟି କାଗଜ ବିକିଲେ 54 ଟଙ୍କା କମିଶନ୍ ପାଇବେ ? 300 ଟି ଖବର କାଗଜ ବିକିଲେ ତାଙ୍କୁ କେତେ କମିଶନ ମିଳିବ ?

9.2 ପ୍ରତିଲୋମୀ ଚଳନ (Inverse Variation)

ଯଦି ଦୁଇଟି ରାଶି ମଧ୍ୟରେ ସଳଖ ଚଳନର ସମ୍ବନ୍ଧ ରହିଥାଏ, ତେବେ ଗୋଟିକର ବୃଦ୍ଧି ହେଲେ ଅନ୍ୟଟିର ବୃଦ୍ଧି ହୁଏ ବା ଗୋଟିକର ହ୍ରାସ ହେଲେ ଅନ୍ୟଟିର ହ୍ରାସ ହୁଏ । କିନ୍ତୁ ଏପରି କେତେ ରାଶି ଅଛନ୍ତି; ଯେଉଁଠି ଗୋଟିକର ବୃଦ୍ଧି ଅନ୍ୟଟିର ହ୍ରାସର କାରଣ ହୋଇଥାଏ ବା ଗୋଟିକର ହ୍ରାସ, ଅନ୍ୟଟିର ବୃଦ୍ଧିର କାରଣ ହୋଇଥାଏ । ଏଥିପାଇଁ କେତେକ ପରିସ୍ଥିତି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ପରିସ୍ଥିତି - 3 :

ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 60 କି.ମି. ବେଗରେ ଯାଉଥିବା ଗୋଟିଏ ମଟରଗାଡ଼ି 1200 କି.ମି. ପଥ ଅତିକ୍ରମ କରିବା ପାଇଁ 20 ଘଣ୍ଟା ସମୟ ନିଏ । ତେବେ 40 କି.ମି. ପ୍ରତି ଘଣ୍ଟା ବେଗରେ ଯାଉଥିବା ଉକ୍ତ ଗାଡ଼ିଟି ସେହି ପଥ ଅତିକ୍ରମ କରିବା ପାଇଁ କେତେ ସମୟ ନେବ ?

ଏଠାରେ ତୁମର ଉତ୍ତର ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ 30 ଘଣ୍ଟା ହେବ । ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ଯେ, ଗାଡ଼ିଟିର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ କମିବାରୁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପଥ ଅତିକ୍ରମ କରିବା ପାଇଁ ବେଶି ସମୟ ଲାଗିବ ।

ନିମ୍ନ ସାରଣୀକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର । ମଟରଗାଡ଼ିର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗର ପରିବର୍ତ୍ତନରେ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପଥ ଅତିକ୍ରମ କରିବା ପାଇଁ ଲାଗୁଥିବା ସମୟକୁ ଉକ୍ତ ସାରଣୀରେ ସୂଚାଯାଇଛି ।

ମଟରଗାଡ଼ିର ବେଗ (କି.ମି. / ଘଣ୍ଟା)	60	50	40	30	20	10
1200 କି.ମି. ପଥ ଅତିକ୍ରମ କରିବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ସମୟ (ଘଣ୍ଟାରେ)	20	24	30	40	60	120

ଉକ୍ତ ସାରଣୀରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ଗାଡ଼ିର ବେଗ ବୃଦ୍ଧି ଘଟିଲେ ପଥ ଅତିକ୍ରମ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକ ସମୟର ହ୍ରାସ ଘଟୁଛି ଏବଂ ବେଗର ହ୍ରାସ ଘଟିଲେ ଅତିକ୍ରାନ୍ତ ସମୟର ବୃଦ୍ଧି ଘଟୁଛି ।

ଦତ୍ତ ଚଳରାଶି ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଚଳରାଶି ଦ୍ୱୟକୁ ସୂଚାଉ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ ସମାନ ହେଉଛି । ଅର୍ଥାତ୍ $60 \times 20 = 50 \times 24 = 40 \times 30 = ... = 1200$

ପରିସ୍ଥିତି - 4 :

ଅନ୍ୟ ଏକ ପରିସ୍ଥିତି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଗୋଟିଏ କାମକୁ 8 ଜଣ ଲୋକ 3 ଦିନରେ ଶେଷ କରନ୍ତି । ସେହି କାମକୁ 6 ଜଣ ଲୋକ, 4 ଜଣ ଲୋକ ଓ 2 ଜଣ ଲୋକ କେତେ କେତେ ଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରିବେ ? ତୁମର ଉତ୍ତର ହେବ 6 ଜଣ, 4 ଜଣ, 2 ଜଣ ଲୋକ ଉକ୍ତ କାମକୁ ଯଥାକ୍ରମେ 4 ଦିନ, 6 ଦିନ ଓ 12 ଦିନରେ ଶେଷ କରିପାରିବେ ।

ଏଠାରେ ଚଳରାଶି ଦ୍ୱୟ (ଲୋକସଂଖ୍ୟା ଓ ଆବଶ୍ୟକ ଦିନ ସଂଖ୍ୟା) ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ବୃଦ୍ଧି / ହ୍ରାସ, ଅନ୍ୟଟିର ହ୍ରାସ/ବୃଦ୍ଧି ଘଟାଇବାର କାରଣ ହେଉଛି ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ସାରଣୀରେ ଉପସ୍ଥାପନ କଲେ ପାଇବା -

ଲୋକସଂଖ୍ୟା (x)	8	6	3	2
ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କାର୍ଯ୍ୟସମାପନ ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ସମୟ (ଦିନରେ) (y)	3	4	8	12
x x y	24	24	24	24

ରାଶିଦ୍ୱୟ x ଓ y ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ $xy = 24$, ଅର୍ଥାତ୍ $xy = K$ (ଧ୍ରୁବସଂଖ୍ୟା)

ଉପରୋକ୍ତ ଦୁଇଟି କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୋଟିଏ ରାଶିର ବୃଦ୍ଧି ଘଟିଲେ ଅନ୍ୟ ରାଶିର ହ୍ରାସ ଘଟେ ବା ପ୍ରଥମ ରାଶିର ହ୍ରାସ ହେଲେ ଦ୍ୱିତୀୟ ରାଶିର ବୃଦ୍ଧି ଘଟେ । ଚଳରାଶିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଏହି ସମ୍ବନ୍ଧକୁ **ପ୍ରତିଲୋମୀ ଚଳନ (Inverse Variation)** କୁହାଯାଏ । ଏପରି ଅନେକ ଉଦାହରଣ ନିଆଯାଇପାରେ ।

ଯଦି x ଓ y ଚଳରାଶି ହୁଅନ୍ତି ଏ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆମେ ଲେଖୁ $x \propto \frac{1}{y}$ ଏବଂ ଆମେ ପଢୁ "x varies inversely as y'

ମନେରଖ : ଯଦି $x \propto \frac{1}{y}$ ହୁଏ, ତେବେ $x = \frac{K}{y}$ ବା $xy = K$ ହେବ ।

x ର ମାନ x_1 ରୁ x_2 କୁ ଏବଂ y ର ମାନ y_1 ରୁ y_2 କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ, ଉପରୋକ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧ ଅନୁଯାୟୀ

$xy = x_1y_1 = x_2y_2 = K$ ଅଥବା $x_1y_1 = x_2y_2$ ହେବ ।

ନିଜେ କର

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀକୁ ଦେଖି x ଓ y ଚଳରାଶିଦ୍ୱୟ ପ୍ରତିଲୋମୀ ଚଳନରେ ଅଛନ୍ତି କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

(a)

x	50	40	30	20
y	5	6	7	8

(b)

x	100	200	300	400
y	60	30	20	15

(c)

x	90	60	45	30	20	5
y	10	15	20	25	30	35

ସୂଚନା : ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ xy ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

2. x ଓ y ଚଳରାଶି ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତିଲୋମୀ ଚଳନର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ । ନିମ୍ନ ସାରଣୀରୁ p ଓ q ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

x	6	5	q
y	80	P	24

ସୂଚନା : $x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 = k$ ସୂତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ p ଓ q ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ଉଦାହରଣ –3 : ଗୋଟିଏ ଛାତ୍ରାବାସରେ 20 ଜଣଙ୍କ ପାଇଁ 15 ଦିନର ଖାଦ୍ୟ ଥିଲା । ସେହି ଖାଦ୍ୟରେ 30 ଜଣ ଛାତ୍ର କେତେ ଦିନ ଚଳିବେ ?

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $x_1 = 20$ ଜଣ $\quad y_1 = 15$ ଦିନ

$x_2 = 30$ ଜଣ $\quad y_2$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ

ଏଠାରେ ଚଳରାଶିଦ୍ୱୟ ପ୍ରତିଲୋମୀ ଚଳନର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ । ଅର୍ଥାତ୍

ଏଠାରେ $x \propto \frac{1}{y}$ । ତେଣୁ ସୂତ୍ର ଅନୁସାରେ $x_1y_1 = x_2y_2 \Rightarrow 20 \times 15 = 30\, y_2 \Rightarrow y_2 = \frac{20 \times 15}{30} = 10$

ଅର୍ଥାତ୍ ଉକ୍ତ ଖାଦ୍ୟରେ 30 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କର 10 ଦିନ ଚଳିଯିବ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ –4 : ଗୋଟିଏ ନାଳ ଖୋଳିବାକୁ 12 ଜଣ ମୂଲିଆ 10 ଦିନ ସମୟ ନିଅନ୍ତି । ସେହି ନାଳଟିକୁ 4 ଦିନରେ ଖୋଳିବା ପାଇଁ କେତେ ମୂଲିଆ ଆବଶ୍ୟକ ?

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $x_1 = 12$ ଜଣ, $y_1 = 10$ ଦିନ (ସମୟ)

$y_2 = 4$ ଦିନ ହେଲେ x_2 ର ମାନ ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ହେବ ।

ଏଠାରେ ଚଳ ରାଶିଦ୍ୱୟ ପ୍ରତିଲୋମୀ ଚଳନର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ । ଅର୍ଥାତ୍ $x \propto \frac{1}{y}$

ସୂତ୍ର ଅନୁଯାୟୀ, $x_1y_1 = x_2y_2 \Rightarrow x_2 = \frac{x_1y_1}{y_2} = \frac{12 \times 10}{4} = 30$

$\therefore$ ନାଳଟିକୁ 4 ଦିନରେ ଖୋଳିବା ପାଇଁ 30 ଜଣ ମୂଲିଆ ଆବଶ୍ୟକ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 9(b)

1. ନିମ୍ନ ଚଳ ରାଶିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ କେଉଁଟି ସଳଖ ଚଳନ ଓ କେଉଁଟି ପ୍ରତିଲୋମୀ ଚଳନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ?

(i) କମଳା ସଂଖ୍ୟା x ଓ ତାହାର ମୂଲ୍ୟ y ଟଙ୍କା ।

(ii) ପାରିଶ୍ରମିକ x ଟଙ୍କା ଓ ଶ୍ରମ ସମୟ y ଦିନ ।

(iii) ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତା ଅତିକ୍ରମ କରିବା ସମୟ x ଘଣ୍ଟା ଓ ବେଗ y କି.ମି. ପ୍ରତି ଘଣ୍ଟା ।

(iv) ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କାମ ସମ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା ଶ୍ରମିକ ସଂଖ୍ୟା x ଓ ଶ୍ରମ ସମୟ y ଘଣ୍ଟା ।

(v) ସମାନ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଆୟତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ମିଟର ଓ ପ୍ରସ୍ଥ y ମିଟର ।

(vi) ଗୋଟିଏ ଘର ରଙ୍ଗ କରିବା ପାଇଁ ଶ୍ରମିକ ସଂଖ୍ୟା x ଓ କାର୍ଯ୍ୟ ଶେଷ କରିବା ପାଇଁ ସମୟ y ଦିନ ।

(vii) ଗୋଟିଏ ମହମବତୀ ଦୈନିକ x ଘଣ୍ଟା ଜଳିଲେ y ଦିନ ଯାଏ ।

2. ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କାର୍ଯ୍ୟ ସମାପନ ପାଇଁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀର ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନଗୁଡ଼ିକ ପୂରଣ କର ।

ଶ୍ରମିକ ସଂଖ୍ୟା (x)	20	15		30	
ଦିନ ସଂଖ୍ୟା (y)	6		12		3
xy = K					

3. ଦତ୍ତ ସାରଣୀମାନଙ୍କରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରତିଲୋମୀ ଚଳନର ଅନ୍ତର୍ଗତ ?

(i)

x	12	8	32
y	16	24	6

(ii)

x	5	10	15	20
y	8	16	24	32

(iii)

x	7	9	11	13
y	56	72	88	104

(iv)

x	30	40	20	24
y	12	9	18	15

4. ଗୋଟିଏ ଶ୍ରେଣୀଗୃହରେ 30 ଜଣ ଛାତ୍ର ବସିଲେ ଜଣ ପିଛା 4 ବର୍ଗମିଟର ସ୍ଥାନ ମିଳେ । ଯଦି ସେହି ଶ୍ରେଣୀରେ ଆଉ 15 ଜଣ ଛାତ୍ର ନାମ ଲେଖାଇଥାନ୍ତି, ତେବେ ଜଣ ପିଛା କେତେ ବର୍ଗମିଟର ସ୍ଥାନ କମିଯିବ ?

5. ଗୋଟିଏ ସ୍କୁଲ୍ ଘର ରଙ୍ଗ କରିବା ପାଇଁ 6 ଜଣ ଶ୍ରମିକ 15 ଦିନ ନିଅନ୍ତି । ତେବେ କାମଟି 5 ଦିନରେ ଶେଷ କରିବା ପାଇଁ କେତେ ଅଧିକ ଶ୍ରମିକ ଆବଶ୍ୟକ ?

6. ଅଂଶୁମାନର ଜନ୍ମ ଦିନରେ ତାହାର 6 ଜଣ ସାଙ୍ଗ ଆସିଥିଲେ । ପ୍ରତି ସାଙ୍ଗ ପାଇଁ 10 ଟି ଲେଖାଏଁ ଚକୋଲେଟ୍‌ର ବ୍ୟବସ୍ଥା ଥିଲା । କିନ୍ତୁ ତା'ର ଆଉ 4 ଜଣ ଅଧିକ ସାଙ୍ଗ ଆସି ପହଞ୍ଚିଲେ । ତେବେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କେତୋଟି କରି ଚକୋଲେଟ୍ ପାଇବେ ?

7. ଗୋଟିଏ କାର୍ଯ୍ୟର ଅର୍ଦ୍ଧେକକୁ 12 ଜଣ ଶ୍ରମିକ 15 ଦିନରେ ଶେଷ କରନ୍ତି ।ପୂରା କାମଟିକୁ 30 ଜଣ ଶ୍ରମିକ କେତେ ଦିନରେ ଶେଷ କରିବେ ?

8. ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରିମାଣ ବୁନ୍ଦିରେ 50 ପଇସା ମୂଲ୍ୟର 100 ଟି ମିଠାଇ ତିଆରି ହୁଏ । ତେବେ ସେହି ବୁନ୍ଦିରେ ଦୁଇଟଙ୍କା ମୂଲ୍ୟର କେତୋଟି ମିଠାଇ ତିଆରି ହେବ ?

9. ସମାନ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତିନୋଟି ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 24, 12, ଓ 8 ମିଟର ହେଲେ, (i)ସେମାନଙ୍କର ଅନ୍ୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।(ii) ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ର ତିନୋଟିର ପ୍ରସ୍ଥମାନଙ୍କର ଅନୁପାତ ସ୍ଥିର କର । ପ୍ରଥମ ପ୍ରଶ୍ନର ଏକାଧିକ ଉତ୍ତର ସମ୍ଭବ କି ? ଯଦି ସମ୍ଭବ, କାହିଁକି ?

10. ଗୋଟିଏ ବନ୍ୟା ଆଶ୍ରୟ ସ୍ଥଳରେ 120 ଜଣ ଲୋକଙ୍କ ପାଇଁ 9 ଦିନର ଚୂଡ଼ା ଓ ଗୁଡ଼ର ବ୍ୟବସ୍ଥା ଥିଲା । ସେଠାକୁ ଆଶ୍ରୟ ନେବା ପାଇଁ 180 ଜଣ ଲୋକ ଆସିଲେ । ସେହି ଖାଦ୍ୟ ସେମାନଙ୍କର କେତେ ଦିନ ଯିବ ?

11. ରବି ସାଇକେଲ୍‌ରେ 10 କି.ମି. ପ୍ରତି ଘଣ୍ଟା ବେଗରେ ଯାଇ ସ୍କୁଲ୍‌ରେ 12 ମିନିଟ୍‌ରେ ପହଞ୍ଚେ । ସେ ତାହାର ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି ବେଗ ଆଉ 2 କି.ମି. ବଢ଼ାଇଲେ ସ୍କୁଲ୍‌ରେ କେତେ ସମୟରେ ପହଞ୍ଚିବ ? ଘରଠାରୁ ତାହାର ସ୍କୁଲ୍ କେତେ ବାଟ ?

9.3 ଯୌଥ ଚଳନ (Joint Variation) :

ଯୌଥ ଚଳନର ସଂଜ୍ଞା ଲେଖିବା ଆଗରୁ ଆମେ ଏକ ପରିସ୍ଥିତିରୁ କିଛି ଅଭିଜ୍ଞତା ହାସଲ କରିବା ।

ପରିସ୍ଥିତି - 5 :

ମନେକର ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ l ଏକକ, ପ୍ରସ୍ଥ b ଏକକ ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ A ବର୍ଗ ଏକକ । $\therefore lb = A$

(i) bର ମାନକୁ ସ୍ଥିର ରଖାଯାଉ । ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ l ର ମାନ ବୃଦ୍ଧି ଘଟିଲେ, A ର ମାନ ବୃଦ୍ଧିହୁଏ ।

l ର ମାନ ହ୍ରାସ ହେଲେ A ର ମାନର ହ୍ରାସ ଘଟେ । ତେଣୁ A (କ୍ଷେତ୍ରଫଳ) ଓ l (ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ସଳଖ ଚଳନରେ ରହୁଛନ୍ତି । ଏହାକୁ ସଂକେତ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ ଆମେ ଲେଖିବା : **$A \propto l$ (ଯେତେବେଳେ b ସ୍ଥିର ରହେ)**

(ii) ବର୍ତ୍ତମାନ l ର ମାନକୁ ସ୍ଥିର ରଖିଲେ, ଆମେ ଦେଖିବା A ର ମାନ ବଢ଼ିବ ଯଦି b ର ମାନ ବଢ଼େ ଏବଂ A ର ମାନ କମିବ ଯଦି b ର ମାନ କମିବ, ଏଣୁ A ଓ b ସଳଖ ଚଳନର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ।

ସଂକେତ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ, ଆମେ ଲେଖିବା, **$A \propto b$ (ଯେତେବେଳେ l ସ୍ଥିର ରହେ)**

(iii) ଯଦି l ଓ b ଉଭୟେ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ A ର ମଧ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଘଟିବ । A, l ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଏହି ସମ୍ବନ୍ଧକୁ ଯୌଥ ଚଳନ କୁହାଯାଏ । ସଂକେତ ମାଧ୍ୟମରେ ଏହାକୁ ନିମ୍ନମତେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

$A \propto lb$ (ଯେତେବେଳେ l ଓ b ପରିବର୍ତ୍ତନଶୀଳ)

ନିଜେ କର : 15 ସେ.ମି. ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ 12 ସେ.ମି. ପ୍ରସ୍ଥ ବିଶିଷ୍ଟ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉପରୋକ୍ତ ଚଳନଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ନିରୂପଣ କରିବାର ଚେଷ୍ଟା କର ।

ଆସ ଆମେ ଉପରୋକ୍ତ (i), (ii) ଓ (iii) ରେ ଉପସ୍ଥାପିତ ଧାରଣାକୁ ଆଉ ଏକ ଦିଗରୁ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିବା ।

(iv) A ର ମୂଲ୍ୟକୁ ସ୍ଥିର ରଖାଯାଉ, ଯେହେତୁ $l = \frac{A}{b}$, ପ୍ରସ୍ଥ (b) କୁ ବୃଦ୍ଧି କଲେ ଦୈର୍ଘ୍ୟ (l) ହ୍ରାସ ପାଏ ଏବଂ ପ୍ରସ୍ଥ (b) ହ୍ରାସ ପାଇଲେ, ଦୈର୍ଘ୍ୟ (l) ବୃଦ୍ଧିପାଏ, ଏଣୁ l ଓ b ପ୍ରତିଲୋମୀ ଚଳନ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ।

ଏହାକୁ ସଂକେତ ମାଧ୍ୟମରେ ଆମେ ଲେଖିବା, **$l \propto \frac{1}{b}$ (ଯେତେବେଳେ A ର ମୂଲ୍ୟ ସ୍ଥିର)**

(v) ପୁନଶ୍ଚ ପ୍ରସ୍ଥ (b) କୁ ସ୍ଥିର ରଖିଲେ, ଦୈର୍ଘ୍ୟ (l)ର ହ୍ରାସ (ବୃଦ୍ଧି) କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (A) ର ହ୍ରାସ (ବୃଦ୍ଧି) ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ ।

ଏହି ପରିସ୍ଥିତିକୁ ଆମେ ସଂକେତ ମାଧ୍ୟମରେ ଲେଖିବା, **$l \propto A$ (ଯେତେବେଳେ b ର ମାନ ସ୍ଥିର)**

(vi) ଯଦି କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (A) ଓ ପ୍ରସ୍ଥ (b) ଉଭୟେ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ଦୈର୍ଘ୍ୟ (l) ର ମଧ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଘଟେ ।

A ର ମାନ ବୃଦ୍ଧି ଓ b ର ମାନ ହ୍ରାସ ହେଲେ, l ର ମାନ ବୃଦ୍ଧି ହୁଏ । ସେହିପରି A ର ମାନ ହ୍ରାସ ଓ b ର ମାନ ବୃଦ୍ଧି ହେଲେ l ର ମାନ ହ୍ରାସ ହୁଏ ।

ଏହି ପରିସ୍ଥିତିକୁ ଆମେ ନିମ୍ନ ସଂକେତ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିଥାଉ ।

$l \propto \frac{A}{b}$ (ଯେତେବେଳେ A ଓ b ଉଭୟ ପରିବର୍ତ୍ତନଶୀଳ)

l, A ଓ b ର ଏହି ସମ୍ବନ୍ଧ ମଧ୍ୟ ଏକ ଯୌଥ ଚଳନ ଅଟେ । ଏହି ପ୍ରକାର ଯୌଥଚଳନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସବିଶେଷ ବିବରଣୀ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ପାଇ ପାରିବ ।

ସଂଜ୍ଞା : ତିନି ବା ତତୋଧିକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଚଳରାଶି ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ରାଶି ଅନ୍ୟ ରାଶିମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ସହିତ ସଳଖ ଚଳନରେ ରହିଲେ, ପ୍ରଥମ ରାଶିଟି ଅନ୍ୟ ରାଶିମାନଙ୍କ ସହ ଯୌଥ ଚଳନରେ ରହିବ ।

ମନେକର x, y ଓ z ତିନୋଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ଚଳରାଶି ।

(i) ଯଦି $x \propto y$ (z ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ) ଓ $x \propto z$ (y ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ), ତେବେ $x \propto yz$ (y ଓ z ଉଭୟ ପରିବର୍ତ୍ତନଶୀଳ) ଏକ୍ଷେତ୍ରରେ x, y ଓ z ସହିତ ଯୌଥ ଚଳନରେ ରହୁଛି ବୋଲି କହିବା ।

(ii) ଯଦି $x \propto y$ (z ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ) ଏବଂ $x \propto \frac{1}{z}$ (y ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ) ତେବେ, $x \propto \frac{y}{z}$ (y ଓ z ଉଭୟେ ପରିବର୍ତ୍ତନଶୀଳ) ଏହା ମଧ୍ୟ x ସହିତ y ଓ z ଏକ ଯୌଥ ଚଳନ ।

ମନେରଖ :

ଯଦି x_1 ଓ x_2, x ର ଦୁଇଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମାନ y_1 ଓ y_2, y ର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମାନ ଏବଂ z_1, ଓ z_2, z ର ଦୁଇଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମାନ ହୁଏ

ଯୌଥଚଳନ $x \propto yz$ ପାଇଁ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \times \frac{z_1}{z_2}$ ହେବ । ...... ସୂତ୍ର (1)

ଯୌଥଚଳନ $x \propto \frac{y}{z}$ ପାଇଁ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \times \frac{z_2}{z_1}$ ...... ସୂତ୍ର (2)

ଯୌଥଚଳନର ପ୍ରୟୋଗ :

ଉଦାହରଣ - 5 : 12 ଜଣ ଲୋକ 120 ମିଟର ଲମ୍ବର ଏକ ରାସ୍ତା 36 ଦିନରେ ଶେଷ କରି ପାରନ୍ତି । ତେବେ 48 ଜଣ ଲୋକ 240 ମିଟର ଲମ୍ବର ରାସ୍ତାକୁ କେତେ ଦିନରେ ଶେଷ କରିବେ ?

ସମାଧାନ :–

ଲୋକ ସଂଖ୍ୟା(x)	ରାସ୍ତାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (y)	ଦିନ ସଂଖ୍ୟା (z)
$x_1 = 12$	$y_1 = 120$ ମି.	$z_1 = 36$ ଦିନ
$x_2 = 48$	$y_2 = 240$ ମି.	$z_2 = ?$

ଏଠାରେ ଲୋକ ସଂଖ୍ୟା ଅଧିକ ହେଲେ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କାମ ଅଳ୍ପଦିନରେ ଶେଷ ହେବ; ଯଦି ରାସ୍ତାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (y) ସ୍ଥିର ରହିବ ।

x ଓ z ପ୍ରତିଲୋମୀ ଚଳନର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ହେବେ । $z \propto \frac{1}{x}$ (y ସ୍ଥିର) ....(i)

ଲୋକ ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର ଥାଇ ରାସ୍ତାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅଧିକ ହେଲେ ରାସ୍ତା କାମ ଶେଷ କରିବା ପାଇଁ ଅଧିକ ସମୟ ଆବଶ୍ୟକ ।

$\therefore$ y ଓ z ସଳଖ ଚଳନର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ହେବେ । $\therefore z \propto y$ (x ସ୍ଥିର) ...(ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ ପାଇବା $z \propto \frac{y}{x}$ (x ଓ y ଉଭୟ ପରିବର୍ତ୍ତନଶୀଳ) $\therefore \frac{z_1}{z_2} = \frac{y_1}{y_2} \times \frac{x_2}{x_1}$ ହେବ । ...ସୂତ୍ର(2)

$$\Rightarrow z_2 = \frac{x_1 \times y_2 \times z_1}{x_2 \times y_1} \Rightarrow z_2 = \frac{12 \times 240 \times 36}{48 \times 120} = 18$$

$\therefore$ 18 ଦିନରେ ଅବଶିଷ୍ଟ କାର୍ଯ୍ୟ ଶେଷ ହେବ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 6 : 6 ଜଣ ପରୀକ୍ଷକ 40 ଘଣ୍ଟାରେ 750 ଖଣ୍ଡ ଖାତା ଦେଖିପାରନ୍ତି । ତେବେ 4 ଜଣ ପରୀକ୍ଷକ କେତେ ଘଣ୍ଟାରେ 800 ଖଣ୍ଡ ଖାତା ଦେଖିପାରିବେ ?

ସମାଧାନ :–

(x) ପରୀକ୍ଷକ ସଂଖ୍ୟା	(y) ସମୟ (ଘଣ୍ଟାରେ)	(z) ଖାତା ସଂଖ୍ୟା
$x_1 = 6$	$y_1 = 40$	$z_1 = 750$
$x_2 = 4$	$y_2 = ?$	$z_2 = 800$

ଏଠାରେ ଖାତା ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର ରହିଲେ ଖାତା ଦେଖିବା ସମୟ ଓ ପରୀକ୍ଷକଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ପ୍ରତିଲୋମୀ ଚଳନର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ହେବେ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $y \propto \frac{1}{x}$ ହେବ । ....(i)

ପରୀକ୍ଷକଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର ରହିଲେ ଖାତା ଦେଖା ସମୟ ଓ ଖାତା ସଂଖ୍ୟା ସଳଖ ଚଳନର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ହେବେ ।

$\therefore y \propto z$ ହେବ । ... (ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ ପାଇବା x, y ଓ z ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଚଳନ ଯୌଥ ଚଳନ ହୋଇଥିବାରୁ $y \propto \frac{z}{x}$ ହେବ ।

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \times \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow y_2 = \frac{x_1\ y_1\ z_2}{z_1\ x_2} \Rightarrow y_2 = \frac{6 \times 40 \times 800}{750 \times 4} = 64$ ଘଣ୍ଟା

$\therefore$ 4 ଜଣ ପରୀକ୍ଷକ 800 ଖାତା ଦେଖିବା ପାଇଁ 64 ଘଣ୍ଟା ସମୟ ନେବେ । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ – 9(c)

1. 5 ଜଣ ଶ୍ରମିକ 8 ଦିନରେ 1600 ଟଙ୍କା ରୋଜଗାର କରନ୍ତି । ତେବେ 8 ଜଣ ଶ୍ରମିକ କେତେ ଦିନରେ 2000 ଟଙ୍କା ରୋଜଗାର କରିବେ ?
2. 10 ଜଣ ଶ୍ରମିକ 6 ଦିନରେ ଗୋଟିଏ ଘର ତିଆରି କରନ୍ତି । ଏକାପରି 4 ଟି ଘରକୁ 12 ଜଣ ଶ୍ରମିକ କେତେ ଦିନରେ ଶେଷ କରିବେ ?
3. 12 ଜଣ ଶ୍ରମିକ 15 ଦିନରେ 150 ମିଟର ରାସ୍ତା ତିଆରି କରିପାରନ୍ତି । ତେବେ 18 ଜଣ ଶ୍ରମିକ କେତେ ଦିନରେ 300 ମିଟର ରାସ୍ତା ତିଆରି କରିବେ ?
4. 10 ଜଣ ପରୀକ୍ଷକ 8 ଦିନରେ 2000 ଖାତା ଦେଖି ପାରନ୍ତି । ତେବେ 12 ଜଣ ପରୀକ୍ଷକ କେତେ ଦିନରେ 3000 ଖାତା ଦେଖିପାରିବେ ?
5. 6 ଜଣ ଲୁଗାବୁଣାଳୀ 8 ଦିନରେ 144 ମିଟର ଲୁଗା ବୁଣିପାରନ୍ତି । 12 ଜଣ ଲୁଗାବୁଣାଳୀ 9 ଦିନରେ କେତେ ମିଟର ଲୁଗା ବୁଣିପାରିବେ ?
6. 8 ଜଣ ଦରଜି 12 ଦିନରେ 360 ଟି ସାର୍ଟ ତିଆରି କରିପାରନ୍ତି । 15 ଦିନରେ 450 ଟି ସାର୍ଟ ତିଆରି ପାଇଁ କେତେ ଜଣ ଦରଜି ଆବଶ୍ୟକ ?
7. 2 ଟି ପାଣି ପମ୍ପ 5 ଘଣ୍ଟାରେ 3ଟି କୁଣ୍ଡର ପାଣି ଟାଣିପାରନ୍ତି । ତେବେ 4 ଟି ପାଣି ପମ୍ପ କେତେ ଘଣ୍ଟାରେ ସେହି ଆକାରର 12 ଟି କୁଣ୍ଡର ପାଣି ଟାଣି ପାରିବ ?
8. ଗୋଟିଏ କାର୍ଯ୍ୟକୁ 25 ଜଣ ଲୋକ ଦୈନିକ 6 ଘଣ୍ଟା ପରିଶ୍ରମ କରି 18 ଦିନରେ ଶେଷ କରନ୍ତି । ସେହି କାର୍ଯ୍ୟଟିକୁ 20 ଜଣ ଲୋକ ଦୈନିକ 5 ଘଣ୍ଟା ପରିଶ୍ରମ କରି କେତେ ଦିନରେ ଶେଷ କରିବେ ?

*****

ତଥ୍ୟ ପରିଚାଳନା ଏବଂ ଲେଖଚିତ୍ର
(DATA HANDLING AND GRAPHS)

ଅଧ୍ୟାୟ **10**

MFPIHM

10.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction):

ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ତୁମେ ବିଭିନ୍ନ କ୍ଷେତ୍ରରେ; ଯଥା– କୃଷି, ଶିଳ୍ପ, ସ୍ୱାସ୍ଥ୍ୟ, ଶିକ୍ଷା, ଅର୍ଥନୀତି, ବାଣିଜ୍ୟ, ପ୍ରତିରକ୍ଷା ଆଦି କ୍ଷେତ୍ରରେ କିଛି ସୂଚନା ପାଇଥାଅ । ପ୍ରତ୍ୟେହ ଖବର କାଗଜ ପୃଷ୍ଠା ଏବଂ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ଗଣମାଧ୍ୟମରେ ମଧ୍ୟ ବିଭିନ୍ନ ତଥ୍ୟ ବିଷୟରେ ସୂଚନା ପାଇଥାଅ । ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟଗତ ଧାରଣାକୁ ଆଧାର କରି କେତେକ ସରକାରୀ ତଥା ବେସରକାରୀ ସଂସ୍ଥାମାନେ ଉପରୋକ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରଗୁଡ଼ିକରେ କୌଣସି ସଂସ୍କାର ତଥା ଅଭିବୃଦ୍ଧିର ଅନୁଶୀଳନ କରିଥା'ନ୍ତି । ଏଥିପାଇଁ **ତଥ୍ୟାବଳୀ ସଂଗ୍ରହ** କରି ଏଗୁଡ଼ିକରୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଉପସ୍ଥାପନାଶୈଳୀ ମାଧ୍ୟମରେ **ବ୍ୟାଖ୍ୟା** ଏବଂ **ବିଶ୍ଳେଷଣ** କରି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ରରେ **ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ**ରେ ପହଞ୍ଚିବାର ପ୍ରୟାସ କରିଥା'ନ୍ତି ।

10.2 ତଥ୍ୟାବଳୀ (Data) :

କେତେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ତଥ୍ୟାବଳୀ ମାଧ୍ୟମରେ ଆମେ ଉପରୋକ୍ତ କ୍ଷେତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସୂଚନା ପାଇଥାଉ । ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା କେତେକ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ ।

(କ) ତୁମ ଶ୍ରେଣୀର ଗତ ବର୍ଷ ବାର୍ଷିକ ପରୀକ୍ଷାରେ ଗଣିତରେ ଉତ୍ତୀର୍ଣ୍ଣ ହୋଇଥିବା ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା ।

(ଖ) ଗତ ମାସରେ ତୁମ ବନ୍ଧୁମାନେ ପଢ଼ିଥିବା ଗପବହିର ସଂଖ୍ୟା ।

(ଗ) ଗତ ସପ୍ତାହରେ ତୁମ ଶ୍ରେଣୀର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦିନର ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀଙ୍କ ଉପସ୍ଥାନ ସଂଖ୍ୟା ଇତ୍ୟାଦି ।

ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ତଥ୍ୟ ବିଭିନ୍ନ ମାଧ୍ୟମରେ ହସ୍ତଗତ ହୋଇଥାଏ । ଏ ପ୍ରକାରର ପ୍ରତ୍ୟେକ ତଥ୍ୟକୁ **'ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟ'** **(Numerical data)** କୁହାଯାଏ ।

ମନେରଖ : 'ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟ' ମାଧ୍ୟମରେ କୌଣସି ବିଷୟଗତ ସୂଚନା ମିଳିଥାଏ ।

କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଲକ୍ଷ୍ୟକୁ ଆଖି ଆଗରେ ରଖି, କୌଣସି ବ୍ୟକ୍ତି, ସଂସ୍ଥା ବା ଅନୁଷ୍ଠାନରୁ ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହକାରୀ ମାନେ ପ୍ରତ୍ୟକ୍ଷ ଭାବରେ ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହ କରିଥା'ନ୍ତି । ଏ ପ୍ରକାର ତଥ୍ୟକୁ **ପ୍ରାଥମିକ ତଥ୍ୟ (Primary data)** କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ତୁମ ସ୍କୁଲର ପ୍ରଧାନ ଶିକ୍ଷକ, ଶ୍ରେଣୀ ଶିକ୍ଷକଙ୍କ ଜରିଆରେ ତୁମ ଶ୍ରେଣୀର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଛାତ୍ର କିମ୍ବା ଛାତ୍ରୀଙ୍କର ଗଣିତ ବିଷୟରେ ଗତ ପରୀକ୍ଷାରେ ରଖିଥିବା ମାର୍କ ଜାଣି ପାରିବେ । ଏଠାରେ ପ୍ରତ୍ୟକ୍ଷ ଭାବରେ ଶ୍ରେଣୀ ଶିକ୍ଷକଙ୍କ ଜରିଆରେ ତୁମ ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କର ଗଣିତ ପରୀକ୍ଷା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସୂଚନା ପାଇପାରିବେ । ଏଠାରେ ଗଣିତରେ ରଖିଥିବା ମାର୍କ ଏକ ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟ ଅଟେ ।

ମାତ୍ର ଅନ୍ୟ କେତେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମୟ, ସୁବିଧା ବା ଅର୍ଥାଭାବରୁ ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହକାରୀଙ୍କ ଜରିଆରେ ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହ ନ କରି ପୁସ୍ତକାଗାର, ସରକାରୀ କାଗଜପତ୍ର, ଖବର କାଗଜ ବା ଟେଲିଭିଜନରେ ପ୍ରସାରିତ ଖବରରୁ ମଧ୍ୟ ବିଭିନ୍ନ ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହ କରାଯାଇଥାଏ । ଏଭଳି ତଥ୍ୟକୁ **ପରୋକ୍ଷ ତଥ୍ୟ (Secondary data)** କୁହାଯାଏ ।

10.3 ତଥ୍ୟାବଳୀର ସଜ୍ଜୀକରଣ (Organisation of Data):

ଆମେ ପ୍ରତ୍ୟକ୍ଷ ବା ପରୋକ୍ଷ ଭାବରେ ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହ କଲାପରେ ଏହାକୁ ଲିପିବଦ୍ଧ କରିବା ବା ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଲକ୍ଷ୍ୟ ସାଧନ ପାଇଁ ସଜାଇ ରଖିବାର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼ିଥାଏ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ମନେକର ଶ୍ରେଣୀ ଶିକ୍ଷକ ଶ୍ରେଣୀର 30 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କ ପାଇଁ ପୋଷାକ ବରାଦ ଦେବେ । ସେଥିପାଇଁ ତାଙ୍କୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଛାତ୍ରଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା ଜାଣିବା ଦରକାର । ତେଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଛାତ୍ରଙ୍କୁ ଜଣ ଜଣ କରି ଡାକି ସେମାନଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା (ସେ.ମି.ରେ) ମାପି ଟିପି ରଖିଲେ । ସେ ମାପ (ସେ.ମି.ରେ) ଗୁଡ଼ିକ ହେଲା –

ସାରଣୀ – 1

148, 150, 152, 150, 151, 152, 152, 149, 150, 148, 148, 150, 151, 151, 152,
148, 149, 148, 149, 150, 151, 150, 152, 152, 152, 149,150, 149, 149, 150

ଲିପିବଦ୍ଧ ଏ ସମସ୍ତ ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟରୁ ନିମ୍ନ କେତେକ ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ଖୋଜି ପାଇବା କଷ୍ଟସାଧ୍ୟ ହୋଇପାରେ ।

(i) ସବୁଠାରୁ ଲମ୍ବା ପୋଷାକର ସାଇଜ୍ (ସେ.ମି.ରେ) କେତେ ?

(ii) ସବୁଠାରୁ ଛୋଟ ପୋଷାକର ସାଇଜ୍ (ସେ.ମି.ରେ) କେତେ ?

ମେରୀ ଏ ସମସ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ଦେବା ପାଇଁ ଆଗଭର ହେଲା ଏବଂ ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ସଜାଇ ରଖିଲା ।

ସାରଣୀ – 2

148, 148, 148, 148, 148, 149, 149, 149, 149, 149, 149, 150, 150, 150, 150,
150, 150, 150, 150, 151, 151, 151, 151, 152, 152, 152, 152, 152, 152, 152

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନଦ୍ୱୟର ଉତ୍ତର ପାଇବାରେ ସୁବିଧା ହୋଇଗଲା ।

କହିଲ ଦେଖି : *ସବୁଠାରୁ ଲମ୍ବା ପୋଷାକର ସାଇଜ୍ ଏବଂ ସବୁଠାରୁ ଛୋଟ ଅର୍ଥାତ୍ ଲମ୍ବାରେ ସାନ ପୋଷାକର ସାଇଜ୍ କେତେ ?*

ଉତ୍ତରରେ ତୁମେ କହିବ ସବୁଠାରୁ ଲମ୍ବା ପୋଷାକର ସାଇଜ୍ 152 ସେ.ମି. ହୋଇଥିଲା ବେଳେ ସବୁଠାରୁ ଛୋଟ ପୋଷାକର ସାଇଜ୍ 148 ସେ.ମି. ହେବ ।

ଯଦି ତଥ୍ୟାବଳୀରେ ଥିବା ତଥ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଧିକ ହୋଇଥାଏ ତେବେ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନରେ ଲେଖିବା କଷ୍ଟ ସାଧ୍ୟ ହୋଇଥାଏ ।

ପୁଣି ଶ୍ରେଣୀ ଶିକ୍ଷକ ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଦ୍ୱୟର ଉତ୍ତର ପାଇବାରେ ଅସୁବିଧାରେ ପଡ଼ିଲେ । ପ୍ରଶ୍ନଦ୍ୱୟ ହେଲା –

(i) 148 ସେ.ମି. ସାଇଜ୍‌ର କେତୋଟି ପୋଷାକ ଆବଶ୍ୟକ ?

(ii) 149 ସେ.ମି. ସାଇଜ୍‌ର କେତୋଟି ପୋଷାକ ଆବଶ୍ୟକ ?

ବର୍ତ୍ତମାନ ସୋହନ୍ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସମସ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ ସଜାଇ ରଖିଲା ।

ସାରଣୀ – 3

ଉଚ୍ଚତା (ସେ.ମି.ରେ)	ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା
148	5
149	6
150	8
151	4
152	7

ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ରମାନେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଖୁସି ହେଲେ ଏବଂ ଶିକ୍ଷକ ପଚାରିଥିବା ପ୍ରଶ୍ନ ଦ୍ୱୟର ଉତ୍ତର ଦେବା ସେମାନଙ୍କ ପାଇଁ ସହଜ ହେଲା ।

ସାରଣୀ -3 ରୁ ଜଣାପଡ଼େ ଯେ, ଶ୍ରେଣୀରେ 148 ସେ.ମି. ଉଚ୍ଚତାବିଶିଷ୍ଟ 5 ଜଣ ଛାତ୍ର ଥିଲା ବେଳେ 149 ସେ.ମି. ଉଚ୍ଚତାବିଶିଷ୍ଟ, 150 ସେ.ମି. ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ, 151 ସେ.ମି.ଉଚ୍ଚତାବିଶିଷ୍ଟ ଏବଂ 152 ସେ.ମି. ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଛାତ୍ରମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା ଯଥାକ୍ରମେ 6, 8, 4 ଓ 7 ।

ଏଠାରେ 148, 149, 150, 151 ଏବଂ 152 ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ **ଲବ୍ଧାଙ୍କ (Score)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟ (ଉଚ୍ଚତା) ସମ୍ବନ୍ଧିତ ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟାକୁ ଉକ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କର **ବାରମ୍ବାରତା (Frequency)** କୁହାଯାଏ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର 148 ଲବ୍ଧାଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତା 5 । ସେହିପରି 149, 150, 151 ଏବଂ 152 ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ବାରମ୍ବାରତା ଯଥାକ୍ରମେ 6, 8, 4, ଏବଂ 7 ।

କହିଲ ଦେଖି – *ସର୍ବାଧିକ ବାରମ୍ବାରତା ବିଶିଷ୍ଟ ଏବଂ ସର୍ବନିମ୍ନ ବାରମ୍ବାରତା ବିଶିଷ୍ଟ ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକ କିଏ ?*

ସାରଣୀ -3 କୁ ଅନୁଧାନ କଲେ ପାଇବା – ସର୍ବାଧିକ ବାରମ୍ବାରତା ବିଶିଷ୍ଟ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଓ ସର୍ବନିମ୍ନ ବାରମ୍ବାରତା ବିଶିଷ୍ଟ ଲବ୍ଧାଙ୍କଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ 149 ସେ.ମି ଓ 151 ସେ.ମି. ।

ତଥ୍ୟ ସଜ୍ଜିକରଣ ନିମିତ୍ତ ନିମ୍ନ ସୋପାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ମନେରଖ ।

- ପ୍ରଥମ ସଂଗୃହୀତ ତଥ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖି ତାହାକୁ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମ (ସାନରୁ ବଡ଼) ବା ଅଧଃକ୍ରମ (ବଡ଼ରୁ ସାନ)ରେ ଲେଖାଯାଏ ।
- ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଥିଲେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ବା ଅଧଃ କ୍ରମରେ ଲେଖିବା ସମୟସାପେକ୍ଷ ହେଉଥିବାରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ତଥ୍ୟାବଳୀରେ କେତେଥର ରହିଛି ତାକୁ ବିଚାରକୁ ନେଇ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତା ନିରୂପଣ କରାଯାଇଥାଏ ।
- ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସହ ବାରମ୍ବାରତାକୁ ନେଇ ଏକ ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଏ ଯାହାକୁ **ବାରମ୍ବାରତା – ବିତରଣ ସାରଣୀ (Frequency - distribution Table)** କୁହାଯାଏ ।

ନିଜେ କର

(a) ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ ସଜାଅ ।

74, 62, 64, 72, 67, 73, 80, 78, 65, 69, 73, 84, 83, 73, 93,
72, 62, 79, 88, 79, 61, 53, 87, 56, 87, 81, 42, 70, 45, 66

(b) ଉକ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ଏକ ବାରମ୍ବାରତା– ବିତରଣ ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର ।

(c) ସାରଣୀକୁ ଦେଖି ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ସର୍ବନିମ୍ନ ଲବ୍ଧାଙ୍କ କେତେ ?

(ii) ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଲବ୍ଧାଙ୍କ କେତେ ?

(iii) କେଉଁ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବାଧିକ ?

(iv) କେଉଁ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବନିମ୍ନ ?

(v) ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

10.4 ତଥ୍ୟ ଉପସ୍ଥାପନା (Presentation of Data) :

ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆମେ ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହ ଏବଂ ତାହାର ସଜ୍ଜିକରଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ କିଛି ଜାଣିଲେ । କେବଳ ତଥ୍ୟ ସଜ୍ଜିକରଣକୁ ସାରଣୀ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିଲେ ଆମେ ତଥ୍ୟଭିତ୍ତିକ ସମସ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ପାଇପାରିବା ପାଇଁ ସକ୍ଷମ ହୋଇ ନ ପାରୁ । ସେଥିପାଇଁ ତଥ୍ୟ ସଜ୍ଜିକରଣ ପରେ ଆମେ ଏହାର ସଫଳ ଉପସ୍ଥାପନା କରିବା ଦରକାର । ସାଧାରଣତଃ ଆମେ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ଗ୍ରାଫ୍ ଅଥବା ଲେଖଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ ତଥ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦେବା ସହଜ ଏବଂ ବୋଧଗମ୍ୟ ହୋଇ ପାରିବ ।

ତିନି ପ୍ରକାର ଗ୍ରାଫ (ଲେଖ ଚିତ୍ର) ଦ୍ୱାରା ତଥ୍ୟ ଉପସ୍ଥାପନା ହୋଇପାରେ । ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା :

(i) ଚିତ୍ରଲେଖ (Pictograph / Picture graph)

(ii) ସ୍ତମ୍ଭ ଲେଖ (Bar graph) ଏବଂ

(iii) ବୃତ୍ତ ଲେଖ (Circle graph / pie chart)

10.4.1. ଚିତ୍ରଲେଖ (Pictograph) :

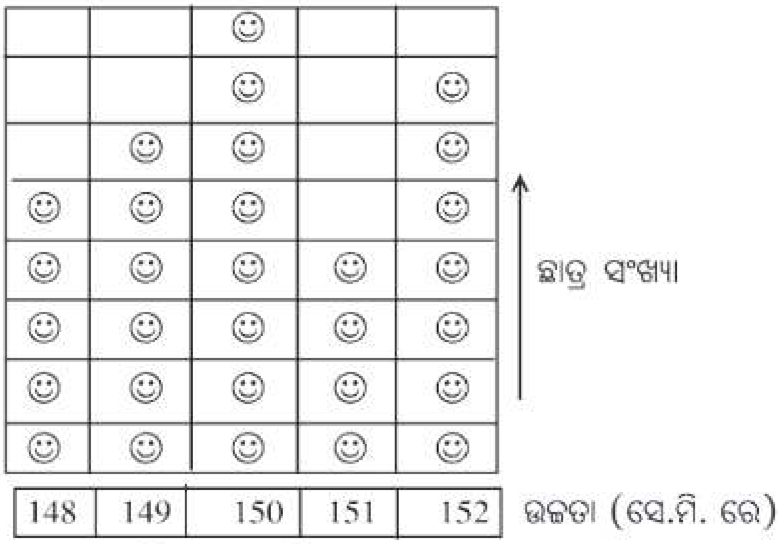
ସଂଗୃହିତ ତଥ୍ୟକୁ ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରି ପାରିଲେ ଆମେ ତାକୁ ଚିତ୍ର ଲେଖ କହିବା ।

ସାରଣୀ – 3ର ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା :

ଉଚ୍ଚତା (ସେ.ମି.ରେ)	ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା							
148	☺	☺	☺	☺	☺			
149	☺	☺	☺	☺	☺	☺		
150	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
151	☺	☺	☺	☺				
152	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺	

ଏଠାରେ ଏକ '☺' ଚିତ୍ରଟି ଗୋଟିଏ ଛାତ୍ରକୁ ବୁଝାଏ । (ଚିତ୍ର – 10.1)

ଉକ୍ତ ଚିତ୍ରଲେଖକୁ ମଧ୍ୟ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ମଧ୍ୟ ଉପସ୍ଥାପନା କରାଯାଇପାରେ ।



(ଚିତ୍ର – 10.2)

ଅନ୍ୟ ଗୋଟିଏ ପରିସ୍ଥିତିକୁ ଆଲୋଚନା ପରିସରକୁ ଆଣିବା ।

ଶ୍ରେଣୀ ଶିକ୍ଷକ 115 ଜଣ ପିଲାଙ୍କର କେତେକ ଫଳଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରତି ସେମାନଙ୍କର ଆଗ୍ରହ ବିଷୟରେ ପଚାରିବାରୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ସେମାନଙ୍କର ସମ୍ମତି ପାଇଲେ ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଲିପିବଦ୍ଧ କଲେ ।

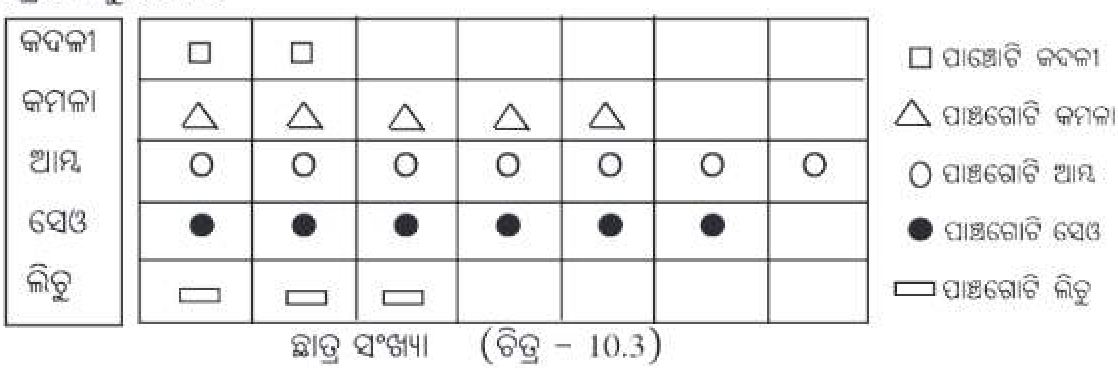
ସାରଣୀ – 4

କଦଳୀ	କମଳା	ଆମ୍ବ	ସେଓ	ଲିଚୁ
10	25	35	30	15

ପରମୁହୂର୍ତ୍ତରେ ପିଲାମାନଙ୍କୁ ଉକ୍ତ ସାରଣୀର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ ନେଇ ଏକ ଛବି ଲେଖ କରିବାକୁ କହିଲେ । ନିହାର କହିଲା, 'ସାର୍ 35 ସଂଖ୍ୟକ ଫଳ ପାଇଁ ଚିତ୍ର କରିବା ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ବଡ଼ କାଗଜର ଆବଶ୍ୟକତା ରହିଛି । ମୁଁ କିପରି କରିପାରିବି ?'

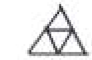
ରହିମ୍ କହିଲା, 'ସାର୍,ମୋର ମନକୁ ଏକ ପ୍ରକାର ଉପାୟ ଆସୁଛି । ଯଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରକାର ଫଳ ପାଇଁ ଥିବା ଗୋଟିଏ ପ୍ରକାରର ଚିତ୍ର ସେହି ପ୍ରକାର 5 ଟି ଫଳକୁ ସୂଚାଇବ, ତେବେ ଆମର ଚିତ୍ର ଲେଖ ପାଇଁ ଆଉ ବଡ଼ କାଗଜ ଦରକାର ପଡ଼ିବ ନାହିଁ' ।ଏହା ଶ୍ରେଣୀ ଶିକ୍ଷକଙ୍କ ମନକୁ ପାଇଲା । ତଦନୁଯାୟୀ ଚିତ୍ରଲେଖକୁ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଗଲା ।

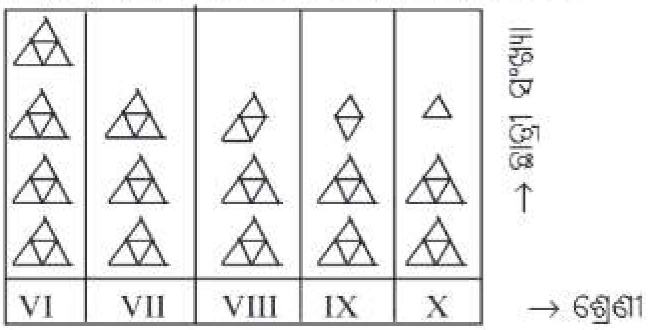
ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରଲେଖକୁ ଦେଖ :



(ଚିତ୍ର – 10.3)

ଆସ ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରଲେଖକୁ ଦେଖି କେତେକ ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ପାଇବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା ।

ଏଠାରେ  ଚିତ୍ରଟି ଚାରି ଜଣ ଛାତ୍ରୀଙ୍କୁ ବୁଝାଏ ।



(ଚିତ୍ର – 10.4)

(a) କେଉଁ ଶ୍ରେଣୀରେ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା ସର୍ବାଧିକ ଏବଂ ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

(b) ସର୍ବନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟକ ଛାତ୍ରୀ କେଉଁ ଶ୍ରେଣୀରେ ଅଛନ୍ତି ?

(c) ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ କେତେ ସଂଖ୍ୟକ ଛାତ୍ରୀ ଅଛନ୍ତି ?

(d) ସପ୍ତମ ଏବଂ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଥିବା ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ କେତେ ହେବ ?

ସମାଧାନ : (a) ପ୍ରଥମ ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ଦେବାକୁ ଯାଇ ସଲିମ୍ କହିଲା –

ଷଷ୍ଠ ଶ୍ରେଣୀରେ ଚିତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ସର୍ବାଧିକ (4) । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚିତ୍ର ଚାରି ଜଣ ଛାତ୍ରୀଙ୍କୁ ସୂଚାଉ ଥିବାରୁ ସମୁଦାୟ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା $= 4 \times 4 = 16$ ।

(b) ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ଦେବାକୁ ଯାଇ ଜାକୋବ୍ କହିଲା –

ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଦୁଇଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ଚିତ୍ର ଏବଂ ଗୋଟିଏ ଅସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ଚିତ୍ର ରହିଛି ।

ଅର୍ଥାତ୍ $4 + 4 + 1 = 9$ ଜଣ ଛାତ୍ରୀ ରହିଛନ୍ତି ।

ଅନ୍ୟ ଶ୍ରେଣୀ ତୁଳନାରେ ଉକ୍ତ ଶ୍ରେଣୀରେ ସର୍ବନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟକ ଛାତ୍ରୀ ଅଛନ୍ତି ।

(c) ତୃତୀୟ ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ଦେବାକୁ ଯାଇ ନେହା କହିଲା, ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଦୁଇଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ଚିତ୍ର ସମେତ ଗୋଟିଏ ଅସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ଚିତ୍ର ଅଛି ।

ଅର୍ଥାତ୍ ଉକ୍ତ ଶ୍ରେଣୀରେ $4 + 4 + 3 = 11$ ଜଣ ଛାତ୍ରୀ ରହିଛନ୍ତି ।

(d) ଚତୁର୍ଥ ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ଦେବାକୁ ଯାଇ ରୋହନ୍ କହିଲା–

ସପ୍ତମ ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା $= 3 \times 4 = 12$ ଏବଂ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା $= 2 \times 4 + 1 = 9$ ।

ଅତଏବ ସପ୍ତମ ଓ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ରୀସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ $= 12 : 9$ ଅଥବା $4 : 3$

10.4.2 ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ (Bar graph):

ଚିତ୍ରଲେଖ ପାଇଁ ବିଭିନ୍ନ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ସମୟସାପେକ୍ଷ ହୋଇଥାଏ । ଏହା ବ୍ୟତୀତ ଚିତ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଆଧିକ୍ୟ ମଧ୍ୟ ଏକ ସମୟସାପେକ୍ଷ କାର୍ଯ୍ୟ । ଏଥିପାଇଁ **ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ** ମାଧ୍ୟମରେ ତଥ୍ୟ ଉପସ୍ଥାପନ, ତଥ୍ୟ ଅନୁଶୀଳନ ଏବଂ ତଥ୍ୟର ବ୍ୟାଖ୍ୟା ଆମ ପାଇଁ ସହଜ ହୋଇ ପାରିବ । ସମ ଓସାର (ପ୍ରସ୍ଥ) ଏବଂ ସ୍ତମ୍ଭ ସ୍ତମ୍ଭ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ ସମାନ ଥାଇ ସ୍ତମ୍ଭ ଲେଖ ସାଧାରଣ ଭାବରେ ସଫଳ ତଥ୍ୟ ଉପସ୍ଥାପନା ପାଇଁ ଆମର ଦୃଷ୍ଟି ଆକର୍ଷଣ କରିଥାଏ ।

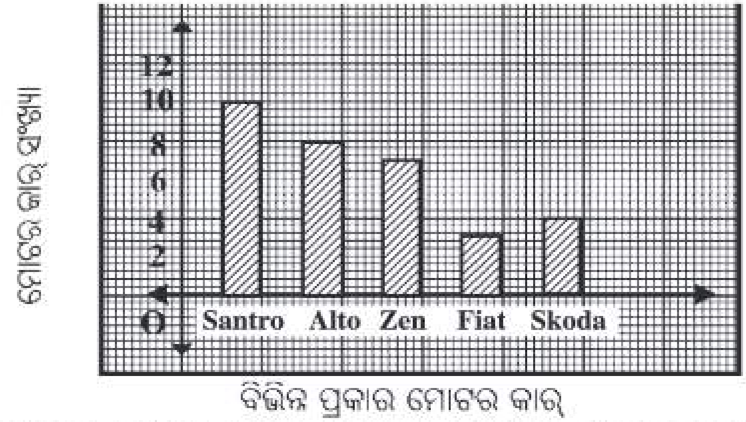
ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟକୁ ଭିତ୍ତି କରି ଅଙ୍କିତ ହୋଇଥାଏ, ଯାହାର ଉଚ୍ଚତା ତଥ୍ୟର ବାରମ୍ବାରତା ଉପରେ ନିର୍ଭର କରିଥାଏ । ସ୍ତମ୍ଭଲେଖକୁ ଆନୁଭୂମିକ(Horizontal) ବା ଉଲ୍ଲମ୍ବ(vertical) ଭାବରେ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଏକ ଉଦାହରଣ ଜରିଆରେ ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀକୁ ଶିଖିବା ପାଇଁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା ।

ଉଦାହରଣ – 1 : ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ଅଙ୍କନ କରିବା ।

ସାରଣୀ – 5

ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ମୋଟର କାର	Santro	Alto	Zen	Fiat	Skoda
ମୋଟର କାର୍ ସଂଖ୍ୟା	10	8	7	3	4



(ଚିତ୍ର – 10.5)

ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ଅଙ୍କନର ସୋପାନ ସମୂହକୁ ଅନୁସରଣ କରି ନିଜେ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

- ପ୍ରଥମେ ଏକ ଲେଖ କାଗଜ ନେଇ ଗୋଟିଏ ଆନୁଭୂମିକ ଏବଂ ଉଲ୍ଲମ୍ବ ରେଖା ଅଙ୍କନ କର ଯେପରିକି ସେମାନେ ପରସ୍ପରକୁ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ଛେଦ କରିବେ ।
- ଆନୁଭୂମିକ ରେଖାର ନିମ୍ନଭାଗରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ମୋଟର କାର୍ ଏବଂ ଉଲ୍ଲମ୍ବ ରେଖାର ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ ମୋଟର କାର୍ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସ୍କେଲ୍‌କୁ ଭିତ୍ତିକରି ଲେଖ ।
- ଆନୁଭୂମିକ ରେଖାରେ ସମାନ ଓସାର ବିଶିଷ୍ଟ ସ୍ତମ୍ଭ ଓ ଦୁଇଟି ଲେଖାଏଁ ସ୍ତମ୍ଭ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନକୁ ସମାନ ରଖି ସ୍କେଲ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କର ଏବଂ ବିଭିନ୍ନ କାର୍‌କୁ ସୂଚାଅ । ଉଲ୍ଲମ୍ବ ରେଖାରେ ପ୍ରତି ପାଞ୍ଚଗୋଟି କିମ୍ବା ଦଶଗୋଟି ଛୋଟ ଘରକୁ ଏକ ଏକକ ଲେଖାଏଁ ନେଇ କାର ସଂଖ୍ୟାକୁ ସୂଚାଅ ।(ଅବଶ୍ୟ ଆବଶ୍ୟକତା ଅନୁଯାୟୀ ନିଜେ ସ୍କେଲ୍ ଚୟନ କର)
- ତତ୍ପରେ ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ଅଙ୍କନ କର ।

ବି.ଦ୍ର. : ଲେଖ କାଗଜର ବିନା ସହାୟତାରେ ଠିକ୍ ମାପ ବିଶିଷ୍ଟ ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ମଧ୍ୟ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ ।

ଆସ ଆମେ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଥିବା ତଥ୍ୟକୁ ଆଧାର କରି ଏକ ଆନୁଭୂମିକ ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ଅଙ୍କନ କରିବା ।

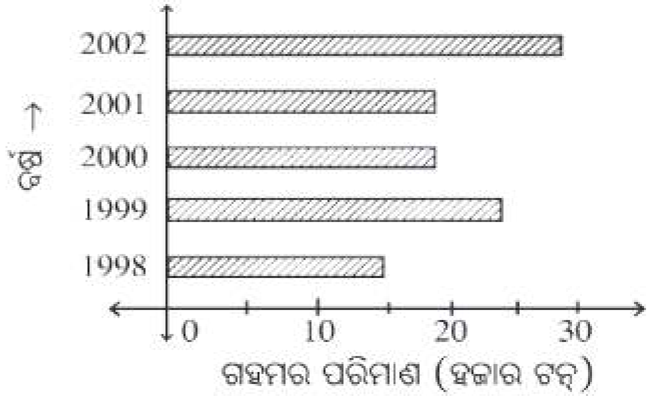
ଉଦାହରଣ– 2 : 1998 ରୁ 2002 ବର୍ଷମାନଙ୍କରେ ଭାରତ ସରକାର ବଜାରରୁ ଗହମ (ହଜାର ଟନ୍‌ରେ) କିଣିଥିଲେ । ଏହାକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ସାରଣୀ – 6

ଗହମର ପରିମାଣ (ହଜାର ଟନ୍‌ରେ)	15	25	20	20	30
ବର୍ଷ (ସମୟ)	1998	1999	2000	2001	2002

ପୂର୍ବ ଉଦାହରଣରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ସୋପାନଗୁଡ଼ିକୁ ଅନୁସରଣ କରି ଆନୁଭୂମିକ ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ଅଙ୍କନ କରିବା ।

ନିଜେ କର ସାରଣୀ-୬ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ତଥ୍ୟକୁ ନେଇ ଉଲ୍ଲମ୍ବ ସ୍ତମ୍ଭ ଲେଖ ଅଙ୍କନ କର



ସ୍କେଲ୍ :
ଆନୁଭୂମିକ ରେଖାରେ
1 ଏକକ = 5 ହଜାର ଟନ୍

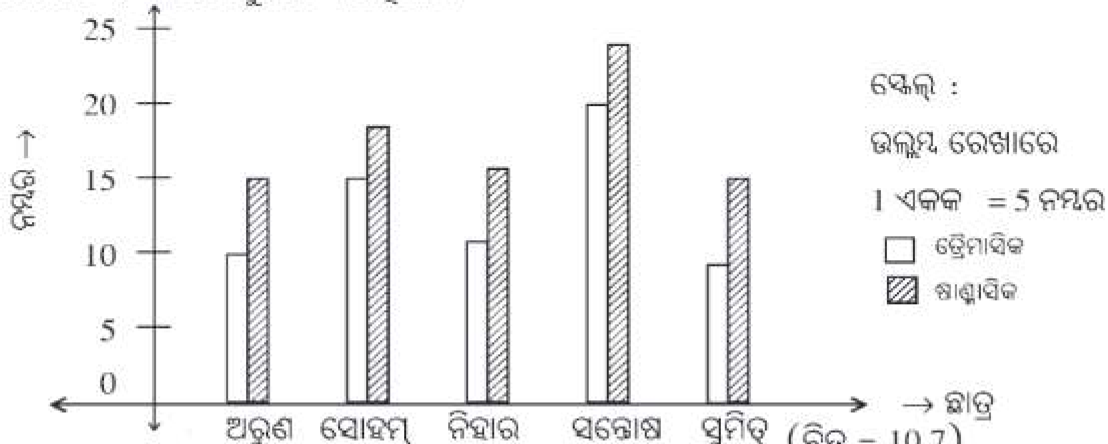
(ଚିତ୍ର – 10.6)

ଉଦାହରଣ – 3 : ଗଣିତ ବିଷୟରେ ପାଞ୍ଚଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଶ୍ରେଣୀ ଶିକ୍ଷକ ଚଳିତ ବର୍ଷର ତ୍ରୈମାସିକ ଏବଂ ଷାଣ୍ମାସିକ ପରୀକ୍ଷାରେ ଛାତ୍ରଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ରଖିଥିବା ମାର୍କକୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ଲିପିବଦ୍ଧ କରି ସେମାନଙ୍କର ଉନ୍ନତି କିମ୍ବା ଅବନତି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିଥିଲେ ।

ସାରଣୀ – 7

ଛାତ୍ର	ଅରୁଣ	ସୋହମ୍	ନିହାର	ସନ୍ତୋଷ	ସୁମିତ୍
ତ୍ରୈମାସିକ ପରୀକ୍ଷା	10	15	12	20	09
ଷାଣ୍ମାସିକ ପରୀକ୍ଷା	15	18	16	24	15

ଶ୍ରେଣୀ ଶିକ୍ଷକ ପ୍ରଥମେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଛାତ୍ର ପାଇଁ ଦୁଇଟି ପାଖାପାଖି ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ଅଙ୍କନ କରି ଦୁଇଟି ପରୀକ୍ଷାରେ ସେମାନଙ୍କର ଉନ୍ନତି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିଥିଲେ ।



(ଚିତ୍ର – 10.7)

ମନେରଖ : ଦୁଇଟି ସ୍ତମ୍ଭକୁ ଲଗାଲଗି ରଖି ତଥ୍ୟ ଉପସ୍ଥାପନ କରିଥିଲେ ସେ ସ୍ତମ୍ଭଲେଖକୁ **ଦ୍ୱି–ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ (Double - Bar graph)** କୁହାଯାଏ ।

ନିଜେ କର ଗୋଟିଏ ଛାତ୍ରର 2008-09 ଏବଂ 2009-10 ଦୁଇ ଶିକ୍ଷାବର୍ଷରେ ତା'ର ପାଠ ବିଷୟରେ ରଖିଥିବା ମାର୍କକୁ (ନିମ୍ନପ୍ରକାରରେ) ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । ଏହାକୁ ଆଧାର କରି ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱି–ସ୍ତମ୍ଭ–ଲେଖ ଅଙ୍କନ କର ।

ସାରଣୀ – 8

ବିଷୟ		ଓଡ଼ିଆ	ଗଣିତ	ବିଜ୍ଞାନ	ସାମାଜିକ ବିଜ୍ଞାନ	ଇଂରାଜୀ
ବିଷୟରେ ରଖିଥିବା ନମ୍ବର	2008 - 09	55	30	50	35	50
	2009 - 10	40	60	55	50	30

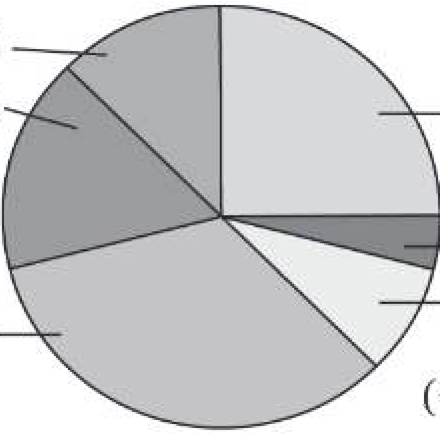
10.4.3. ବୃତ୍ତଲେଖ (Circle graph / pie chart)

ନିହାର ସପ୍ତମ ଶ୍ରେଣୀରେ ତା'ର ଗାଁ ସ୍କୁଲ୍‌ରେ ପଢୁଥିଲା ବେଳେ ସ୍କୁଲ୍‌ର କାନ୍ଥରେ ଏକ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ ଆମ ପ୍ରଦେଶର ସମସ୍ତ ଜିଲ୍ଲା ସମୂହକୁ ସୁନ୍ଦର ଭାବରେ ସଜାଇ ଲେଖାଯାଇଥିବାର ଦେଖିଥିଲା । ଚିତ୍ରଲେଖ ଏବଂ ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ପଢ଼ି ସାରିଲା ପରେ ସେ ହଠାତ୍ ଶ୍ରେଣୀରେ କହିଥିଲା; ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ ଆମ ସ୍କୁଲ୍‌ର କାନ୍ଥରେ ଲେଖାଯାଇଥିବା ଭଳି ବିଭିନ୍ନ ତଥ୍ୟକୁ ସଜାଇ ଉପସ୍ଥାପନ କରାଯାଇପାରନ୍ତା ତେବେ କିପରି ହୁଅନ୍ତା ? ଶ୍ରେଣୀ ଶିକ୍ଷକ ନିହାରର କଥାକୁ ଗ୍ରହଣ କରି ରମେଶକୁ ଡାକି ପଚାରିଲେ ତୁମେ ଗୋଟିଏ ଦିନର (24 ଘଣ୍ଟା) ସମୟକୁ ସାଧାରଣ ଭାବରେ କିପରି କଟାଉଛ ? ରମେଶ ଯାହା ସବୁ କହିଲା ଶିକ୍ଷକ ସେ ସବୁ ତଥ୍ୟକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଲିପିବଦ୍ଧ କରି ରଖିଲେ ।

ସାରଣୀ – 9

ଦୈନନ୍ଦିନ କାର୍ଯ୍ୟର ବିବରଣୀ	ସ୍କୁଲରେ ଉପସ୍ଥାନ	ନିତ୍ୟ କର୍ମ	ଖେଳ	ବିଶ୍ରାମ	ଘରେ ପାଠପଢ଼ା	ଅନ୍ୟାନ୍ୟ କାର୍ଯ୍ୟ
ସମୟ (ଘଣ୍ଟାରେ)	6	1	2	8	4	3

ନିହାରର କହିବା ଅନୁସାରେ ଶିକ୍ଷକ ବୃତ୍ତଟିଏ ଅଙ୍କନ କରି ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ସଜାଇ ରଖିଲେ ।



(ଚିତ୍ର – 10.8)

ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କାର୍ଯ୍ୟ ବିବରଣୀ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ତଥ୍ୟକୁ ଉପସ୍ଥାପନା କରାଯାଇଥିବାରୁ ଉକ୍ତ ଚିତ୍ରକୁ ବୃତ୍ତ ଲେଖ କହିବା ।

ବୃତ୍ତଲେଖ କେବଳ ପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଂଶ ସହ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦତ୍ତ ଅଂଶମାନଙ୍କର ଏକ ସଂପର୍କକୁ ନେଇ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । ଅର୍ଥାତ୍ ଦୈନିକ ବିଶ୍ରାମ ସମୟ (8 ଘଣ୍ଟା) ହେଉଛି 24 ଘଣ୍ଟାର ଏକ ତୃତୀୟାଂଶ, ସ୍କୁଲ୍‌ରେ ରହିବା ସମୟ (6 ଘଣ୍ଟା) ହେଉଛି 24 ଘଣ୍ଟାର ଏକ ଚତୁର୍ଥାଂଶ, ଘରେ ପାଠପଢ଼ା ପାଇଁ ସମୟ (4 ଘଣ୍ଟା) ହେଉଛି 24 ଘଣ୍ଟାର $\frac{1}{6}$ ଅଂଶ ଏବଂ ଖେଳ ପାଇଁ ସମୟ (2 ଘଣ୍ଟା) ହେଉଛି 24 ଘଣ୍ଟାର $\frac{1}{12}$ ଅଂଶ ଓ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ କାର୍ଯ୍ୟ ପାଇଁ ସମୟ (3 ଘଣ୍ଟା) ହେଉଛି 24 ଘଣ୍ଟାର $\frac{1}{8}$ ଅଂଶ । ମାତ୍ର, ଏଠାରେ ବୃତ୍ତଟି ଛଅଗୋଟି ବୃତ୍ତକଳାରେ ବିଭକ୍ତ ହୋଇଛି । ବୃତ୍ତକଳାର ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର ପରିମାଣ, ରମେଶର ଦୈନିକ କାର୍ଯ୍ୟ ପରିମାଣ ସହ ସମାନୁପାତୀ ହୋଇଥାଏ । ନିମ୍ନ ବିଶ୍ଳେଷଣକୁ ଦେଖ ।

(a) ସ୍କୁଲ୍ ପାଇଁ ସୂଚିତ ଅଂଶର ପରିମାଣ = $\frac{6\text{ଘଣ୍ଟା}}{24\text{ଘଣ୍ଟା}} = \frac{1}{4}$

(b) ନିତ୍ୟକର୍ମ ପାଇଁ ସୂଚିତ ଅଂଶର ପରିମାଣ = $\frac{1\text{ଘଣ୍ଟା}}{24\text{ଘଣ୍ଟା}} = \frac{1}{24}$

(c) ଖେଳ ପାଇଁ ସୂଚିତ ଅଂଶର ପରିମାଣ = $\frac{2\text{ଘଣ୍ଟା}}{24\text{ଘଣ୍ଟା}} = \frac{1}{12}$

(d) ବିଶ୍ରାମ ପାଇଁ ସୂଚିତ ଅଂଶର ପରିମାଣ = $\frac{8 \text{ ଘଣ୍ଟା}}{24 \text{ ଘଣ୍ଟା}} = \frac{1}{3}$

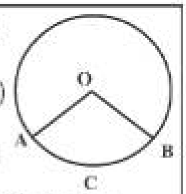
(e) ଘରେ ପାଠପଢ଼ା ପାଇଁ ସୂଚିତ ଅଂଶର ପରିମାଣ = $\frac{4 \text{ ଘଣ୍ଟା}}{24 \text{ ଘଣ୍ଟା}} = \frac{1}{6}$

(f) ଅନ୍ୟାନ୍ୟ କାର୍ଯ୍ୟ ପାଇଁ ସୂଚିତ ଅଂଶର ପରିମାଣ = $\frac{3 \text{ ଘଣ୍ଟା}}{24 \text{ ଘଣ୍ଟା}} = \frac{1}{8}$

ମନେରଖ :

- ବୃତ୍ତର ଯେକୌଣସି ଦୁଇ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଏବଂ ଚାପକୁ ନେଇ ଗଠିତ ଚିତ୍ରକୁ ବୃତ୍ତକଳା କୁହାଯାଏ ।
- ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ O A C B ଏକ ବୃତ୍ତକଳା ।
- ବୃତ୍ତକଳାର ସଂପୃକ୍ତ ଚାପର ଡ଼ିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ହେଉଛି 360^0 ର ଏକ ଭଗ୍ନାଂଶ ସହ ସମାନ ।
- ଏକ ବୃତ୍ତର ସମସ୍ତ ବୃତ୍ତକଳା ସହ ସଂପୃକ୍ତ ଚାପ ମାନଙ୍କର ଡ଼ିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସମଷ୍ଟି 360^0 ହେବ ।

(ଚିତ୍ର–10.9)



ମୋହିତ ଶିକ୍ଷକଙ୍କୁ ପଚାରିଲା ବୃତ୍ତରେ ଛଅଗୋଟି ବୃତ୍ତକଳା ସେ କିପରି ଅଙ୍କନ କରିପାରିଲେ । ଶିକ୍ଷକ କହିଲେ ଯଦି ବୃତ୍ତକଳାର କେନ୍ଦ୍ରୀୟ କୋଣର ପରିମାଣ ଜାଣିପାରିବା ତେବେ ଅତି ସହଜରେ ଆମେ ବୃତ୍ତକଳାଗୁଡ଼ିକୁ ପାଇପାରିବା । ଆସ ଦେଖିବା ବୃତ୍ତକଳାର କେନ୍ଦ୍ରୀୟ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ପାଇବା କିପରି ?

ନିମ୍ନ ସାରଣୀକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : **ସାରଣୀ – 10**

ରମେଶର ଗୋଟିଏ ଦିନର କାର୍ଯ୍ୟାବଳୀ	ସମୟ (ଘଣ୍ଟାରେ)	ଆନୁପାତିକ ଅଂଶ (ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟାରେ)	360^0 ର ଆନୁପାତିକ ଅଂଶ (ଡିଗ୍ରୀରେ)
ବିଶ୍ରାମ	8	$\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$	360^0 ର $\frac{1}{3} = 120^0$
ନିତ୍ୟକର୍ମ	1	$\frac{1}{24}$	360^0 ର $\frac{1}{24} = 15^0$
ସ୍କୁଲ୍ ଉପସ୍ଥାନ	6	$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$	360^0 ର $\frac{1}{4} = 90^0$
ଘରେ ପାଠପଢ଼ା	4	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$	360^0 ର $\frac{1}{6} = 60^0$
ଖେଳ	2	$\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$	360^0 ର $\frac{1}{12} = 30^0$
ଅନ୍ୟାନ୍ୟ କାର୍ଯ୍ୟ	3	$\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$	360^0 ର $\frac{1}{8} = 45^0$
ସମୁଦାୟ	24 ଘଣ୍ଟା		କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି $= 360^0$

ଶିକ୍ଷକ ବର୍ତ୍ତମାନ ମୋହିତକୁ ଡାକି ବୃତ୍ତ ଲେଖ ଅଙ୍କନର ସମସ୍ତ ସୋପାନଗୁଡ଼ିକୁ ବୁଝାଇ କହିଲେ ।

ସୋପାନ :

- ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର ।
- ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କାର୍ଯ୍ୟ ବା ସୂଚନା ଅନୁଯାୟୀ ଆବଶ୍ୟକ ବୃତ୍ତକଳାର କେନ୍ଦ୍ରୀୟ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର । (ପୂର୍ବ ପୃଷ୍ଠାରେ ଦତ୍ତ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।)
- ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସାହାଯ୍ୟରେ କେନ୍ଦ୍ରରେ କୋଣମାନ ଅଙ୍କନ କରି ବୃତ୍ତକଳାଗୁଡ଼ିକୁ କାର୍ଯ୍ୟ ବା ସୂଚନା ଅନୁଯାୟୀ ସୂଚାଅ ।

(ନିଜେ କର) .ଗୋଟିଏ ଛାତ୍ରାବାସରେ ରହୁଥିବା ଛାତ୍ରମାନେ କହିପାରୁଥିବା ଭାଷାମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଏକ ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଇଛି । ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକୁ ଆଧାର କରି ଏକ ବୃତ୍ତଲେଖ ଅଙ୍କନ କର ।

ସାରଣୀ – 11

ଭାଷା	ଓଡ଼ିଆ	ହିନ୍ଦୀ	ଇଂରାଜୀ	ସଂସ୍କୃତ
ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟା	18	9	6	3

10.5 ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ (Grouped Frequency Distribution) :

ମନେକର ଗୋଟିଏ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢୁଥିବା 30 ଜଣ ପିଲାଙ୍କର ଗଣିତ ବିଷୟରେ ପରୀକ୍ଷା କରାଗଲା । ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା 50 ରୁ ସେମାନଙ୍କର ପ୍ରାପ୍ତାଙ୍କ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

19, 14, 10, 12, 24, 29, 34, 10, 14, 12, 19, 24, 38, 34, 24,
5, 7, 19, 12, 14, 24, 19, 38, 22, 29, 24, 19, 19, 14, 25

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦ 10.3 ଅନୁସରଣରେ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତ କଲେ ତାହା ନିମ୍ନମତେ ପ୍ରକାଶିତ ହେବ ।

ସାରଣୀ – 12

ଲବ୍ଧାଙ୍କ (Score)	ବାରମ୍ବାରତା (Frequency)
5	1
7	1
10	2
12	3
14	4
19	6
22	1
24	5
25	1
29	2
34	2
38	2

ଏଠାରେ ପିଲାମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ବହୁତ ବେଶି ହେଲେ ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା 50 ନ ହୋଇ 100 ହୋଇଥିଲେ ଏହି ସାରଣୀ ଅଧିକ ଦୀର୍ଘ ହୋଇଥା'ନ୍ତା । ଏପରି ସ୍ଥଳେ ଉପରୋକ୍ତ ସାରଣୀର ଏକ ଅନୁରୂପ ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା ବିରକ୍ତିକର, ସମୟସାପେକ୍ଷ ଏବଂ କଷ୍ଟକର ହେବ । ଏପରି ଏକ ସାରଣୀରୁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୂଚନା ପାଇବା କଷ୍ଟକର ହୋଇପଡ଼ିବ ।

ଏପରିସ୍ଥଳେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ପାଇଁ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ନ କରି, ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ କେତେକ **ଶ୍ରେଣୀ ବା ସଂଭାଗ (Class or Group)** ରେ ବିଭକ୍ତ କରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗ ପାଇଁ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ । ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ **ସଂଭାଗୀକରଣ (Classification)** କୁହାଯାଏ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆସ ଦତ୍ତ ସାରଣୀରେ ଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସମୂହକୁ ନେଇ କିଛି ସଂଭାଗରେ ପରିଣତ କରିବା । ଏଠାରେ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଏବଂ ସର୍ବନିମ୍ନ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ 38 ଏବଂ 5 ହୋଇଥିବାରୁ ତଥ୍ୟାବଳୀର **ବିସ୍ତାର (Range)** = (38 – 5) = 33

ତଥ୍ୟାବଳୀର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଓ ସର୍ବନିମ୍ନ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଦୂରତ୍ୱକୁ ତଥ୍ୟାବଳୀର ବିସ୍ତାର (range) କୁହାଯାଏ ।

ସାଧାରଣତଃ ତଥ୍ୟାବଳୀର ବିସ୍ତାର ଅଧିକ ହୋଇଥିଲେ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ବିଭିନ୍ନ ସଂଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରାଯାଏ । ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସଂଭାଗୀକରଣ ନିମ୍ନମତେ କରାଯାଇ ପାରେ ।

0 - 10, 10 - 20, 20 - 30, 30 - 40

ଏଠାରେ ସମସ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ 4 ଟି ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରାଯାଇଛି, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗକୁ ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ **ସଂଭାଗ (Class Interval)** କୁହାଯାଏ । ନିମ୍ନ ସାରଣୀକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।

ସାରଣୀ – 13

ସଂଭାଗ	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40
ବାରମ୍ବାରତା	2	15	9	4

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର (0 - 10) ଏବଂ (10 - 20) ସଂଭାଗ ଦ୍ୱୟରେ "10" ଉଭୟ ସଂଭାଗରେ ରହିଛି । ସେହିପରି "20", (10 - 20) ଏବଂ (20 - 30) ସଂଭାଗ ଦ୍ୱୟରେ ଅଛି । ଏଥିପାଇଁ ଆମେ ଧରିନେବା ଯେ, "10" ପ୍ରଥମ ସଂଭାଗରେ ନ ରହି ଦ୍ୱିତୀୟ ସଂଭାଗରେ ଏବଂ "20" ଦ୍ୱିତୀୟ ସଂଭାଗରେ ନରହି ତୃତୀୟ ସଂଭାଗରେ ରହିବ ।

'30' ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଦତ୍ତ ଚାରୋଟି ସଂଭାଗ ମଧ୍ୟରୁ (30 - 40) ସଂଭାଗରେ ରହିବ ।

ମନେରଖ :

- '10 - 20' ସଂଭାଗର 10 କୁ ସଂଭାଗଟିର **ନିମ୍ନସୀମା (Lower Limit)** ଏବଂ 20 କୁ ସଂଭାଗର **ଉଚ୍ଚସୀମା (Upper Limit)** କୁହାଯାଏ ।
- ସେହିପରି (20 - 30) କ୍ଷେତ୍ରରେ 20 ଏବଂ 30 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଉକ୍ତ ସଂଭାଗର ନିମ୍ନସୀମା ଏବଂ ଉଚ୍ଚସୀମା କୁହଯାଏ ।
- ସଂଭାଗର ଉଚ୍ଚସୀମା ଓ ନିମ୍ନସୀମା ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର ଫଳକୁ ସଂଭାଗର ବିସ୍ତାର କୁହାଯାଏ ।

  0 - 5, 5 – 10, 10 – 15 ..... ଇତ୍ୟାଦି ସଂଭାଗୀକରଣରେ ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର ହେବ 5 ।

  କାରଣ 5 – 0 = 10 – 5 = ... = 5

ଉପରୋକ୍ତ ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀରୁ ଆମେ ନିମ୍ନ କେତେଗୋଟି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ସହଜରେ ପହଞ୍ଚିପାରିବା ।

(i) 30 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ସର୍ବାଧିକ 15 ଜଣ ଛାତ୍ର 10 ଏବଂ 10 ରୁ 20 ମଧ୍ୟରେ ମାର୍କ ରଖିଛନ୍ତି ।

(ii) 20 କିମ୍ବା 20 ରୁ ଅଧିକ ମାର୍କ ରଖିଥିବା ଛାତ୍ରଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା 13 ।

(iii) 20 ରୁ କମ୍ ମାର୍କ ରଖିଥିବା ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟା 17, ଇତ୍ୟାଦି ।

(ନିଜେ କର)

1. 20 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କର ଓଜନ ର ଏକ ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର ଯାହାର ବିସ୍ତାର 5 ହେବ । ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ହେଲା, 40, 38, 33, 48, 60, 53, 31, 46, 34, 36, 49, 41, 55, 49, 65, 42, 44, 47, 38, 39

2. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ (ତଥ୍ୟାବଳୀ) ନେଇ ଏକ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର ଯାହାର ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର 10 ହେବ ।

21, 10, 30, 22, 33, 5, 37, 12, 25, 42, 15, 39, 26, 32, 18, 27, 28, 19, 29, 35, 31, 24, 36, 18, 20, 38, 22, 44, 16, 24, 10, 27, 39, 28, 49, 29, 32, 23, 31, 21, 34, 22, 23, 36, 24, 36, 33, 47, 48, 50, 39, 20, 7, 16, 36, 45, 47, 30, 22, 17

ଉଦାହରଣ – 4 : ନିମ୍ନ ଭାଗବିଭକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରି ଦତ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

ଗୋଟିଏ କାରଖାନା ର 550 ଜଣ କର୍ମଚାରୀଙ୍କର ଆୟକୁ ଭାଗବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ସାରଣୀ – 14

ସଂଭାଗ	ବାରମ୍ବାରତା
100 - 125	45
125 - 150	25
150 - 175	55
175 - 200	125
200 - 225	140
225 - 250	55
250 - 275	35
275 - 300	50
300 - 325	20

ସମୁଦାୟ କର୍ମଚାରୀ ସଂଖ୍ୟା = 550

(i) ଦତ୍ତ ସମ୍ଭାଗମାନଙ୍କର ବିସ୍ତାର କେତେ ?

(ii) କେଉଁ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବାଧିକ ?

(iii) କେଉଁ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବନିମ୍ନ ?

(iv) (200 - 275) ସଂଭାଗର ଉଚ୍ଚସୀମା କେତେ ?

(v) କେଉଁ ଦୁଇ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ସମାନ ?

(vi) 150 ଟଙ୍କାରୁ କମ୍ ଆୟବିଶିଷ୍ଟ କର୍ମଚାରୀଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

ଉତ୍ତର : (i) ସଂଭାଗର ବିସ୍ତାର (25) ।

(ii) (200 - 225) ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବାଧିକ (140) ।

(iii) (300 - 325) ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବନିମ୍ନ (20) ।

(iv) (200 - 275) ସଂଭାଗର ଉଚ୍ଚସୀମା 275 ।

(v) (150 - 175) ଏବଂ (225 - 250) ସଂଭାଗ ଦ୍ୱୟର ବାରମ୍ବାରତା ସମାନ (55) ।

(vi) 45 +25 = 70 ଜଣ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କର ଆୟ 150 ଟଙ୍କାରୁ କମ୍ ।

10.6. ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ (Histogram) :

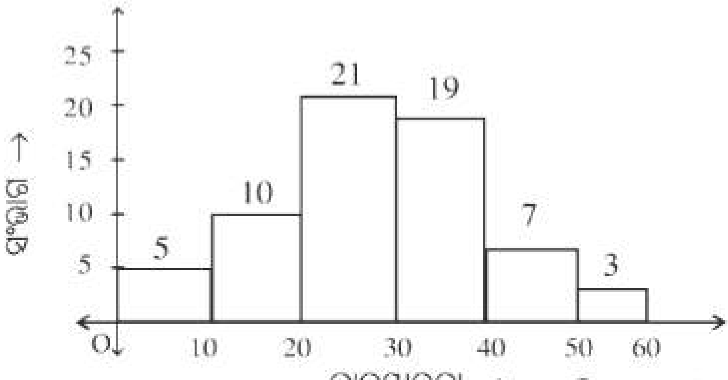
ଭାଗବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣକୁ ଲେଖଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ । 10.4.2 ବିଭାଗରେ ତୁମେମାନେ ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ଦ୍ୱାରା ତଥ୍ୟ ଉପସ୍ଥାପନା କିପରି ହୁଏ ତାହା ଜାଣିଛ । ସ୍ତମ୍ଭଲେଖରେ ସ୍ତମ୍ଭମାନଙ୍କର ବିସ୍ତାର (ପ୍ରସ୍ଥ) ସମାନ ଥିଲା ବେଳେ ସେମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ ସମାନ ରହିଥାଏ । ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ ପ୍ରସ୍ତୁତି ବେଳେ ଅନୁରୂପ ଭାବେ ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ମଧ୍ୟ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଥାଏ । କିନ୍ତୁ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ କିଛି ନ ଥାଏ । ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍‌ରେ ସ୍ତମ୍ଭର ଓସାର ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର ଉପରେ ନିର୍ଭର କରିଥାଏ ଏବଂ ସ୍ତମ୍ଭର ଉଚ୍ଚତା ଅନୁରୂପ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ହୋଇଥାଏ । ସଂଭାଗ-ସଂଭାଗ ମଧ୍ୟରେ ବ୍ୟବଧାନ କିଛି ନ ଥିବାରୁ ସ୍ତମ୍ଭ ଅଙ୍କନ ବେଳେ ବ୍ୟବଧାନ ମଧ୍ୟ କିଛି ନ ଥାଏ । ଏଠାରେ ମନେରଖିବା ଉଚିତ ହେବ ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ।

ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକର ସଂଭାଗୀକରଣ ବ୍ୟବସ୍ଥାରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ତମ୍ଭଲେଖକୁ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ କୁହାଯାଏ । ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ କହିବାକୁ ଗଲେ ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସ୍ତମ୍ଭଲେଖକୁ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ – 5 : ଦତ୍ତ ଭାଗବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀକୁ ନେଇ ବର୍ତ୍ତମାନ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ ଅଙ୍କନ କରିବା ।

ସାରଣୀ – 15

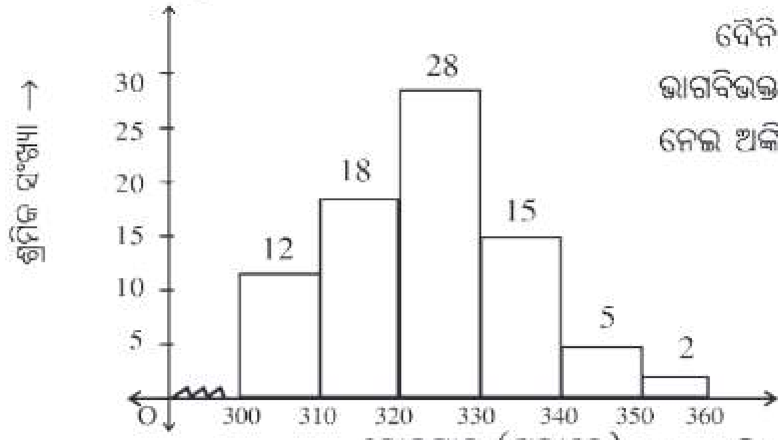
ସଂଭାଗ	ବାରମ୍ବାରତା
0 - 10	5
10 - 20	10
20 - 30	21
30 - 40	19
40 - 50	7
50 - 60	3
	65



(ଚିତ୍ର–10.10)

ଅଙ୍କିତ ଲେଖଚିତ୍ରକୁ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ (Histogram) କୁହାଯାଏ । ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ଅଙ୍କନର ସୋପାନସମୂହକୁ ଅନୁସରଣ କରି ଉକ୍ତ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ ଅଙ୍କିତ ହୋଇଛି ।

ଉଦାହରଣ - 6 : ନିମ୍ନ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍‌ଟି ଗୋଟିଏ କାରଖାନାର ୪0 ଜଣ ଶ୍ରମିକଙ୍କର ଦୈନିକ ରୋଜଗାର ସହ ସଂପୃକ୍ତ ଏକ ଭାଗବିଭକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ଭିତ୍ତି କରି ଅଙ୍କିତ ହୋଇଛି ।



ଦୈନିକ ରୋଜଗାର ସହ ସଂପୃକ୍ତ ଏକ ଭାଗବିଭକ୍ତ– ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଏବଂ ବାରମ୍ବାରତାକୁ ନେଇ ଅଙ୍କିତ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍

(ଚିତ୍ର–10.11)

ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍‌କୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରି ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ସର୍ବାଧିକ ରୋଜଗାର ଦର୍ଶାଉଥିବା ସଂଭାଗରେ ଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା ଲେଖ ।

(ii) କେଉଁ ସଂଭାଗରେ ସର୍ବାଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ବ୍ୟକ୍ତି ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ?

(iii) ଦତ୍ତ ସଂଭାଗଗୁଡ଼ିକର ବିସ୍ତାର କେତେ ?

(iv) କେତେଜଣ ବ୍ୟକ୍ତି 330 ଟଙ୍କାରୁ କମ୍ ରୋଜଗାର କରନ୍ତି ?

(v) 340 ଟଙ୍କା କିମ୍ବା ଏହାଠାରୁ ଅଧିକ ଟଙ୍କା ରୋଜଗାର କରୁଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

ସମାଧାନ :

(i) (350 - 360) ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା 2 । ତେଣୁ ଅଧିକ ରୋଜଗାର କରୁଥିବା ବ୍ୟକ୍ତି ସଂଖ୍ୟା 2 ।

(ii) (320 - 330) (iii) 10

(iv) 330 ଟଙ୍କାରୁ କମ୍ ରୋଜଗାର କରୁଥିବା ବ୍ୟକ୍ତି ସଂଖ୍ୟା = 12 + 18 + 28 = 58

(v) 340 ଟଙ୍କା କିମ୍ବା ଏହାଠାରୁ ଅଧିକ ରୋଜଗାର କରୁଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା = 5 + 2 = 7

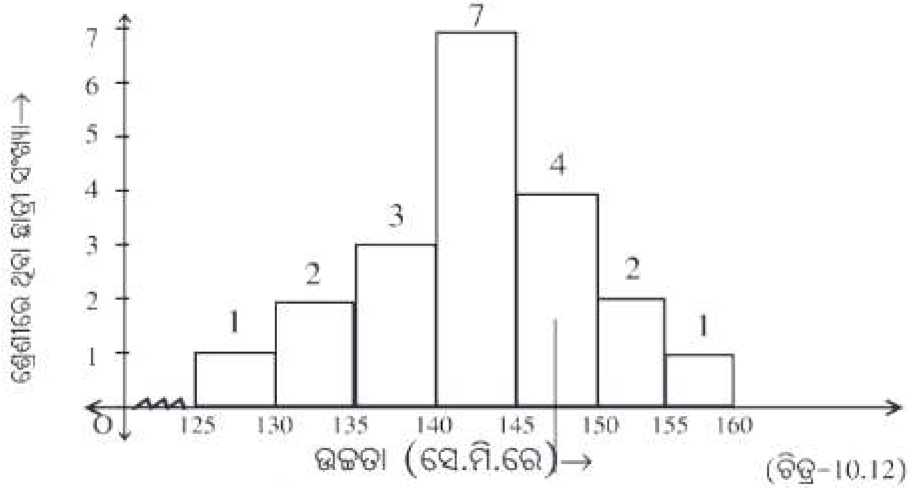
ନିଜେ କର

1. ତୁମ ସ୍କୁଲର 25 ଜଣ ଶିକ୍ଷକଙ୍କର ବୟସକୁ ନିମ୍ନ ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଛି । ଏହାକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ ଅଙ୍କନ କର ।

ସାରଣୀ – 16

ସଂଭାଗ	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 -45	45 - 50
ବାରମ୍ବାରତା	4	5	6	3	2	5

2. ପ୍ରସ୍ତୁତ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରି ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦେବାକୁ ଚେଷ୍ଟାକର ।



(ଚିତ୍ର–10.12)

(i) ଦତ୍ତ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍‌ରୁ କେଉଁ ସୂଚନା ମିଳୁଛି ?

(ii) କେଉଁ ସଂଭାଗରେ ସର୍ବାଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ଛାତ୍ରୀ ଅଛନ୍ତି ?

(iii) 145 ସେ.ମି. ଏବଂ ତା' ଠାରୁ ଅଧିକ ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

(iv) 140 ସେ.ମି. ରୁ କମ୍ ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

(v) ଉଚ୍ଚତା 140 ସେ.ମି. ଓ 145 ସେ.ମି. ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

ଅନୁଶୀଳନୀ – 10 (a)

1. ଜଣେ ଡାକ୍ତରଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସପ୍ତାହର ବିଭିନ୍ନ ଦିନରେ ପରୀକ୍ଷା କରିଥିବା ରୋଗୀ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଏକ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । ସାରଣୀରେ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ ନେଇ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ଅଙ୍କନ କର ।

ସାରଣୀ – 17

ବାରସମୂହ	ସୋମ	ମଙ୍ଗଳ	ବୁଧ	ଗୁରୁ	ଶୁକ୍ର	ଶନି
ରୋଗୀ ସଂଖ୍ୟା	16	20	26	13	25	28

2. ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କର ମାସିକ ବେତନ ଟ. 6400 । ସେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉପାୟରେ ମାସିକ ଖର୍ଚ୍ଚକୁ ଆବଣ୍ଟନ କରିବା ପାଇଁ ଚାହିଁଲେ । ତଥ୍ୟକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟ ସମୂହକୁ ବ୍ୟବହାରକରି ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ ଲେଖ ଅଙ୍କନ କର ।

3. ଗୋଟିଏ ଗ୍ରାମର ବିଭିନ୍ନ ଉପାୟ (ମାଧ୍ୟମ) ଅବଲମ୍ବନରେ ସ୍କୁଲ୍ ଯାଉଥିବା ପୁଅ ଓ ଝିଅ ସଂଖ୍ୟାକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । ଏହାକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱି-ସ୍ତମ୍ଭ ଲେଖ ଅଙ୍କନ କର ।

ସାରଣୀ - 18

ମାଧ୍ୟମ ସମୂହ	ସ୍କୁଲ୍ ବସ୍	ଚାଲିକରି	ସାଇକେଲ୍	ଅନ୍ୟାନ୍ୟ
ପୁଅ ସଂଖ୍ୟା	75	120	240	150
ଝିଅ ସଂଖ୍ୟା	135	60	180	90

4. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ ଦ୍ୱାରା ଗୋଟିଏ ସହରର ବିଭିନ୍ନ ସମୟରେ ତାପମାତ୍ରା କେତେ ଥିଲା ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଲେଖଟିକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରି ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

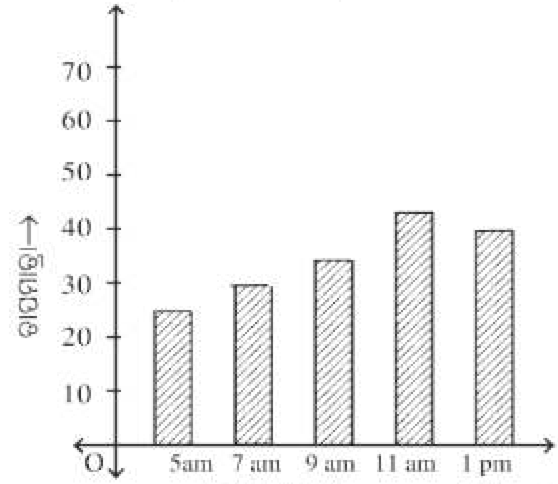
(a) ଦିନର କେଉଁ ସମୟରେ ତାପମାତ୍ରା ସର୍ବାଧିକ ଥିଲା ?

(b) ଦିନର କେଉଁ ସମୟରେ ତାପମାତ୍ରା ସର୍ବନିମ୍ନ ଥିଲା ?

(c) 45^0C ତାପମାତ୍ରା ଦିନର କେଉଁ ସମୟରେ ଥିଲା ?

(d) ସର୍ବାଧିକ ତାପମାତ୍ରା ଏବଂ ସର୍ବନିମ୍ନ ତାପମାତ୍ରା ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର କେତେ ?

(e) ଅପରାହ୍ଣ ଗୋଟାଏ ବେଳେ ଦିନର ତାପମାତ୍ରା କେତେ ଥିଲା ?



(ଚିତ୍ର-10.13)

5. ନିମ୍ନ ବାରମ୍ବାରତା - ବିତରଣ ସାରଣୀକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରି ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ । ଉକ୍ତ ସାରଣୀରେ 40 ଜଣ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କର ଓଜନ (କିଲୋଗ୍ରାମ୍‌ରେ) ଦିଆଯାଇଛି ।

ସାରଣୀ - 19

ଓଜନ (କି.ଗ୍ରା.ରେ)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
ବ୍ୟକ୍ତି ସଂଖ୍ୟା	4	12	13	6	5

(a) ପ୍ରଥମ ସଂଭାଗର ନିମ୍ନସୀମା ଏବଂ ଉଚ୍ଚସୀମା କେତେ ?

(b) କେଉଁ ସଂଭାଗର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ସର୍ବାଧିକ ?

(c) 50 କି.ଗ୍ରା.ରୁ କମ୍ ଓଜନ ବିଶିଷ୍ଟ ବ୍ୟକ୍ତି ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

(d) କେଉଁ ସଂଭାଗର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ସର୍ବନିମ୍ନ ?

(e) ଦତ୍ତ ସଂଭାଗୀକରଣରେ ତଥ୍ୟାବଳୀର ବିସ୍ତାର କେତେ ?

6. ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଏକ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ ଅଙ୍କନ କର । ଏଠାରେ 25 ଜଣ ପିଲାଙ୍କର ଗୋଟିଏ ପରୀକ୍ଷାରେ ରଖିଥିବା ନମ୍ବରକୁ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ସାରଣୀ - 20

ସଂଭାଗ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟା(ବାରମ୍ବାରତା)	1	4	6	8	4	2

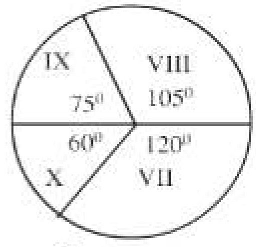
7. ଗୋଟିଏ ସ୍କୁଲ୍‌ର VII ରୁ X ଶ୍ରେଣୀ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି 720 । ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ବୃତ୍ତଲେଖକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରି ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(a) X ଶ୍ରେଣୀରେ ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

(b) X ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା VIII ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟାଠାରୁ କେତେ କମ୍ ?

(c) IX ଏବଂ X ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ କେତେ ?

(d) VII ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା IX ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟାଠାରୁ କେତେ ଅଧିକ ?



(ଚିତ୍ର-10.14)

8. ସମୁଦାୟ 1080 ଜଣ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ସେମାନଙ୍କର ଖାଦ୍ୟରୁଚିକୁ ଦୃଷ୍ଟିରେ ରଖି ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତଲେଖ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ବୃତ୍ତ ଲେଖକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରି ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ପ୍ରଦାନ କର ।

(a) କେତେ ଜଣ ବ୍ୟକ୍ତି ପରଟା ଏବଂ କେତେ ଜଣ ବ୍ୟକ୍ତି ରୁଟିକୁ ପସନ୍ଦ କରନ୍ତି ?

(b) କେତେଜଣ ବ୍ୟକ୍ତି ଚାଉମିନ୍ ଏବଂ ପିଜାକୁ ପସନ୍ଦ କରନ୍ତି ?

(c) ଅଧିକ କେତେଜଣ ବ୍ୟକ୍ତି ଦୋସା ଅପେକ୍ଷା ରୁଟିକୁ ପସନ୍ଦ କରନ୍ତି ?

(d) ପରଟାକୁ ପସନ୍ଦ କରୁଥିବା ବ୍ୟକ୍ତି ସଂଖ୍ୟା, ପିଜାକୁ ପସନ୍ଦ କରୁଥିବା ବ୍ୟକ୍ତି ସଂଖ୍ୟାଠାରୁ କେତେ ଅଧିକ ?

(ଚିତ୍ର-10.15)

9. ଗୋଟିଏ ସ୍କୁଲ୍‌ରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭାଷାକୁ ପ୍ରଥମ ଭାଷା ରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରିଥିବା ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ଦିଆଯାଇଛି । ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ବ୍ୟବହାରି କରି ଗୋଟଏ ବୃତ୍ତଲେଖ ଅଙ୍କନ କର ।

ସାରଣୀ – 21

ଭାଷା	ଇଂରାଜୀ	ହିନ୍ଦୀ	ଓଡ଼ିଆ	ବଙ୍ଗଳା	ତେଲୁଗୁ
ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା	50	20	80	18	12

10. ସାରଣୀରେ ଥିବା ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ନେଇ ଗୋଟିଏ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ ଅଙ୍କନ କର ।

ସାରଣୀ – 22

ସଂଭାଗ	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
ବାରମ୍ବାରତା	5	10	19	24	18	6

11. 40 ଟି ଘରର ଇଲେକ୍‌ଟ୍ରିକ୍ ବିଲ୍ ଆସିଛି । ବିଲ୍‌ରେ ଲିପିବଦ୍ଧ ଟଙ୍କାକୁ ନିମ୍ନରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଆଧାରରେ ଗୋଟିଏ ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ବଣ୍ଟନ ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର । (ସଂଭାଗର ବିସ୍ତାର 10 ହେବ)

(ଆବଶ୍ୟକ ହେଲେ ଟାଲି ଚିହ୍ନ ବ୍ୟବହାର କରିପାର)

78, 87, 81, 52, 59, 65, 101, 108, 11.5, 95, 98, 65, 62, 121, 128, 63, 76, 84, 89, 91, 65,

101, 95, 8.1, 87, 105, 129, 92, 75, 105, 78, 72, 107, 116, 127, 100, 80, 82, 61, 118

12. ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର 0-5, 5-10,.... ପ୍ରଭୃତି ସଂଭାଗୀକରଣ ଥାଇ ଏକ ବାରମ୍ବାରତା ବଣ୍ଟନ ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର । ତପ୍ରରେ ଏହାକୁ ନେଇ ଏକ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ ଅଙ୍କନ କର ।

13, 6, 12, 9, 11, 14, 2, 8, 18, 16, 9, 13, 17, 11, 19,

6,7, 12, 22, 21, 18, 1, 8, 12, 18, 13, 5, 10, 12, 4

10.7 ଲେଖଚିତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ଧାରଣା (Introduction to Graphs) :

ସାଧାରଣତଃ ତଥ୍ୟର ପରିବେଷଣ ବା ଉପସ୍ଥାପନା ବିଭିନ୍ନ ଗ୍ରାଫ୍ (ଲେଖଚିତ୍ର) ମାଧ୍ୟମରେ କରାଯାଇଥାଏ । ସଂଗୃହୀତ ତଥ୍ୟର ଉପସ୍ଥାପନା ଚିତ୍ର ବା ଲେଖ ମାଧ୍ୟମରେ କରାଯାଇ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷକ ବା ଗବେଷଣାକାରୀଙ୍କର ଦୃଷ୍ଟିଆକର୍ଷଣ କରାଯାଏ । ପ୍ରଥମେ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ସାରଣୀରେ ଲିପିବଦ୍ଧ କରି ଆବଶ୍ୟକତା ଅନୁଯାୟୀ ବିଭିନ୍ନ ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ଏହାର ଉପସ୍ଥାପନା କରାଯାଏ, ଯାହା ନିଆଯାଇଥିବା ତଥ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ସୂଚନା ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା କରିବା ସମ୍ଭବପର ହୋଇଥାଏ ।

ତୁମେମାନେ ପୂର୍ବରୁ ଚିତ୍ର ଲେଖ (Pictograph), ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ (Bar graph) ଏବଂ ଭାଗବିଭକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀ ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ସଂଗୃହୀତ ତଥ୍ୟର ଉପସ୍ଥାପନା କିପରି କରାଯାଏ ତାହା ଜାଣିଛ ।

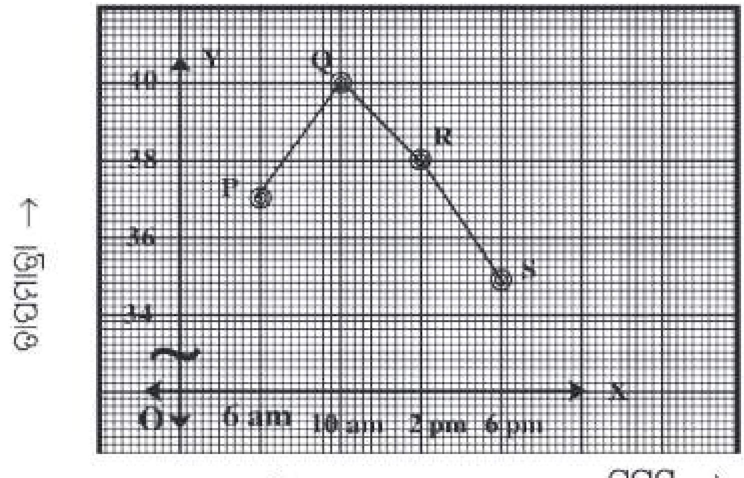
ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦମାନଙ୍କରେ ଆଲୋଚିତ ସମସ୍ତ ଲେଖ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଉପସ୍ଥାପନା ନିମିତ୍ତ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ।

ଏତଦ୍ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ଏକ ଲେଖଚିତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ -7 : ରେଣୁର ଦେହ-ତାପମାତ୍ରା ଦିନର ପ୍ରତି 4 ଘଣ୍ଟା ଅନ୍ତରରେ ଥର୍ମୋମିଟର ସାହାଯ୍ୟରେ ମାପି ଗୋଟିଏ ସାରଣୀରେ ଲିପିବଦ୍ଧ କରାଯାଇଛି । ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ ଭିତ୍ତିକରି ଏକ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି ।

ସାରଣୀ - 23

ସମୟ	6 a.m	10 a.m	2 p.m	6 p.m
ତାପମାତ୍ରା (0^0c)	37	40	38	35



(ଚିତ୍ର-10.16)

ମନେରଖ : ଆନୁଭୂମିକ (ସମୟ ସୂଚାଇଥିବା) ରେଖାକୁ ସାଧାରଣତଃ x - axis ବା x- ଅକ୍ଷ କୁହାଯାଏ । ଉଲ୍ଲମ୍ବ (ତାପମାତ୍ରା ସୂଚାଇଥିବା) ରେଖାକୁ y- axis ବା y - ଅକ୍ଷ କୁହାଯାଏ ।

(i) ସମୟ ଅନୁଯାୟୀ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତାପମାତ୍ରାକୁ ଭିତ୍ତିକରି ତଥ୍ୟକୁ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା (P, Q, R, S ଦ୍ୱାରା) ସୂଚାଇ ଦିଆଯାଇଛି ।

(ii) ସେହି ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ପରମୁହୂର୍ତ୍ତରେ ରେଖାଖଣ୍ଡ ($\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$) ଦ୍ୱାରା ସଂଯୋଗ କରାଯାଇଛି ।

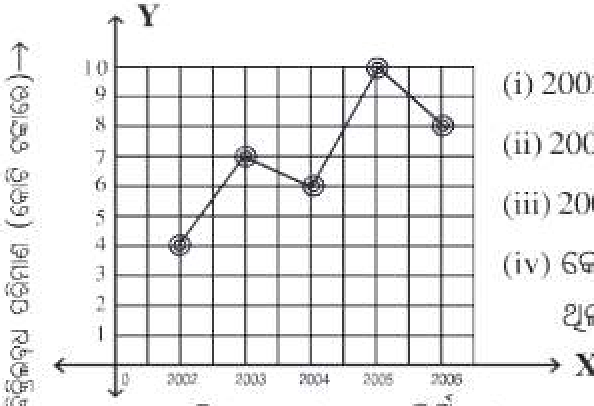
ଏପ୍ରକାରର ଲେଖଚିତ୍ରକୁ **ସମୟ -ତାପମାତ୍ରା ରେଖା-ଲେଖ (Time - Temperature Line graph)** କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ଲେଖରେ ସମୟ ସହ କ୍ରମାଗତଭାବେ ତାପମାତ୍ରାର ପରିବର୍ତ୍ତନ ଘଟୁଛି । ବର୍ତ୍ତମାନ କହିଲ ଉକ୍ତ ଲେଖରୁ କେଉଁ କେଉଁ ସୂଚନା ପାଉଛ ?

ସମୀର କହିଲା:- ଦିନ ଦଶଟା ବେଳେ ତାପମାତ୍ରା ସର୍ବାଧିକ ଥିଲା ।

ରମେଶ କହିଲା :- ଦିନ ଦଶଟାରୁ କ୍ରମାଗତ ତାପମାତ୍ରା କମି ସଂଧ୍ୟା ଛ'ଟାରେ ସର୍ବନିମ୍ନ ହେଲା ।

ରେଖାଲେଖ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅନ୍ୟ ଏକ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଉଦାହରଣ -୪ : ଗୋଟିଏ ଯନ୍ତ୍ରାଂଶ ଉତ୍ପାଦନକାରୀ ସଂସ୍ଥାର ବିଭିନ୍ନ ବର୍ଷମାନଙ୍କରେ ବିକ୍ରିଲବ୍ଧ ଟଙ୍କାର ପରିମାଣ (କୋଟିରେ) ନିଆଯାଇ ଗୋଟିଏ ରେଖା ଲେଖ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଇଛି । ରେଖାଚିତ୍ରକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରି ନିମ୍ନପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।



(ଚିତ୍ର-10.17) ବର୍ଷ →

(i) 2002 ଏବଂ 2004 ରେ ବିକ୍ରିଲବ୍ଧ ଟଙ୍କାର ପରିମାଣ କେତେ ଥିଲା ?

(ii) 2003 ଏବଂ 2005 ରେ ବିକ୍ରିଲବ୍ଧ ଟଙ୍କାରେ ପରିମାଣ କେତେ ଥିଲା ?

(iii) 2002 ଓ 2006 ରେ ବିକ୍ରିଲବ୍ଧ ଟଙ୍କାର ପରିମାଣର ତଫାତ୍ କେତେ ?

(iv) କେଉଁ ବର୍ଷରେ ସଂସ୍ଥାଟିର ବିକ୍ରିଲବ୍ଧ ଟଙ୍କାର ପରିମାଣ ସର୍ବାଧିକ ଥିଲା ?

ସମାଧାନ :

(i) 2002 ବର୍ଷରେ ବିକ୍ରିଲବ୍ଧ ଟଙ୍କାର ପରିମାଣ : ଚାରି କୋଟି

2004 ବର୍ଷରେ ବିକ୍ରିଲବ୍ଧ ଟଙ୍କାର ପରିମାଣ : ଛଅ କୋଟି

(ii) 2003 ବର୍ଷରେ ବିକ୍ରିଲବ୍ଧ ଟଙ୍କାର ପରିମାଣ : ସାତ କୋଟି

2006 ବର୍ଷରେ ବିକ୍ରିଲବ୍ଧ ଟଙ୍କାର ପରିମାଣ : ଆଠ କୋଟି

(iii) 2002 ଓ 2006 ବର୍ଷ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ବିକ୍ରିଲବ୍ଧ ଟଙ୍କାର ପରିମାଣର ଅନ୍ତର : ଚାରି କୋଟି

(iv) 2005 ରେ ବିକ୍ରିଲବ୍ଧ ଟଙ୍କାର ପରିମାଣ ସର୍ବାଧିକ ଥିଲା । ତାହା ହେଉଛି : ଦଶ କୋଟି ।

10.8 ସରଳରେଖୀୟ ଲେଖଚିତ୍ର (Linear Graphs) :

ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଉଦାହରଣ ଦ୍ୱୟରେ କେତେକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଗୁଡ଼ିକୁ ଏକ କ୍ରମରେ ସଂଯୋଗ କରି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିଛି । କେତେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଲେଖଚିତ୍ରଟି ଏକ ସରଳରେଖାର ରୂପ ନେଇଥାଏ । ଏ ପ୍ରକାର ଲେଖଚିତ୍ରଟିକୁ **ସରଳରେଖୀୟ ଲେଖଚିତ୍ର (Linear Graph)** କୁହାଯାଏ । ଏଭଳି ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ଲେଖକାଗଜ ଉପରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବାକୁ ପଡ଼ିଥାଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଲେଖ କାଗଜ ଉପରେ କିପରି ସହଜରେ ବିନ୍ଦୁକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିପାରିବା ତାହା ଉପରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବାର ଅର୍ଥ ଲେଖକାଗଜ ଉପରେ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥାନକୁ ଜାଣିବା ।

10.8.1. ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ନିରୂପଣ (Location of a Point):

ଶିକ୍ଷକ ଶ୍ରେଣୀରେ ପାଠ ପଢ଼ାଉଥିଲାବେଳେ ତୁମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଥିବା କଳାପଟା ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ ଚକ୍ ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଇଲେ । ସେ ପଚାରିଲେ,

'ପିଲାମାନେ କହିଲ ଦେଖି ଚକ୍ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ ବିନ୍ଦୁଟି କଳାପଟାରେ କେଉଁଠାରେ ଅଛି ?

ଉକ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଉତ୍ତର ଶିକ୍ଷକ ପାଇଲେ । ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା –

ବିନ୍ଦୁଟି କଳାପଟାର ଉପର ଅର୍ଦ୍ଧାଂଶରେ ଚିହ୍ନିତ ହୋଇଛି ;

ବିନ୍ଦୁଟି କଳାପଟାର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଧାର ଆଡ଼କୁ ଚିହ୍ନିତ ହୋଇଛି :

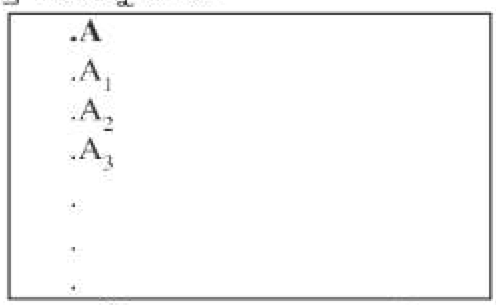
ବିନ୍ଦୁଟି କଳାପଟାର ବାମପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଉପର କଣ ଆଡ଼କୁ ଚିହ୍ନିତ ହୋଇଛି । ଇତ୍ୟାଦି ।

ଏ ସମସ୍ତ ଉତ୍ତରରୁ ଚକ୍ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ ବିନ୍ଦୁଟିର ଅବସ୍ଥାନ ଠିକ୍ ରୂପେ ଜଣାପଡ଼ିଲା କି ? ବୋଧହୁଏ ନୁହେଁ । କାହିଁକି ନୁହେଁ ? ଭାବିଲ ଦେଖି ।

ସଂଗେ ସଂଗେ ଜନ୍ କଳାପଟା ପାଖକୁ ଯାଇ କଳାପଟାର ବାମପାର୍ଶ୍ୱର ଧାର ଠାରୁ ବିନ୍ଦୁଟି କେତେ ଦୂରରେ ଚିହ୍ନିତ ହୋଇଛି ସ୍କେଲ୍ ଦ୍ୱାରା ମାପି କହିଲା –

'ସାର୍, 'A' ଚିହ୍ନିତ ବିନ୍ଦୁଟି ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ ରୁ ମାତ୍ର ୯୦ ସେ.ମି. ଦୂରରେ ରହିଛି ।

ନିମ୍ନ ଚିତ୍ର 10.18 କୁ ଦେଖ ।



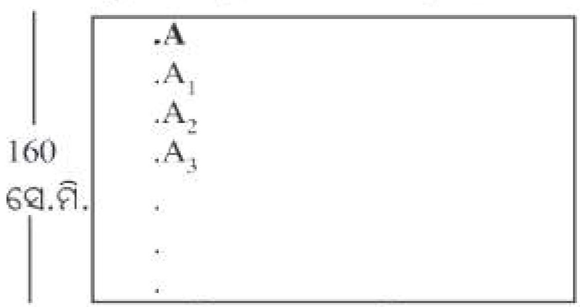
୯୦ ସେ.ମି. (ଚିତ୍ର-10.18)

ଶିକ୍ଷକ ପୁଣି ଥରେ ପିଲାମାନଙ୍କ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟରେ କହିଲେ– ପିଲାମାନେ କହିଲ ଦେଖି ଜନ୍ ଦେଇଥିବା ଉତ୍ତରଟି 'A' ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥାନ ଠିକ୍ ରୂପେ ସୂଚାଇ ପାରିବ ତ ?

ଲକ୍ଷ୍ୟକର କଳାପଟାର ବାମପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଧାର ଠାରୁ ୯୦ ସେ.ମି. ଦୂରରେ A ଭଳି ଅନେକ ବିନ୍ଦୁ ସୂଚିତ ହୋଇଛି ।

ସଂଗୀତା ସଂଗେ ସଂଗେ କଳାପଟା ପାଖକୁ ଯାଇ 'A' ବିନ୍ଦୁଟି ତଳଧାର ଠାରୁ କେତେ ଦୂରରେ ଅଛି ମାପି ଜନ୍ କହିଥିବା ଉତ୍ତରରେ କିଛି ମାପକୁ ଯୋଡ଼ି କହିଲା–

ସାର୍ କଳାପଟାରେ 'A' ଚିହ୍ନିତ ବିନ୍ଦୁଟି କଳାପଟାର ବାମପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଧାରରୁ ୯୦ ସେ.ମି. ଏବଂ ନିମ୍ନ ପାର୍ଶ୍ୱର ଧାରରୁ 160 ସେ.ମି. ଦୂରରେ ଚିହ୍ନିତ ହୋଇଛି । ନିମ୍ନ ଚିତ୍ର 10.19 କୁ ଦେଖ ।



୯୦ ସେ.ମି. (ଚିତ୍ର-10.19)

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ବର୍ତ୍ତମାନ 'A' ବିନ୍ଦୁ କଳାପଟାରେ ପ୍ରକୃତ ଅବସ୍ଥାନଟି ନିରୂପିତ ହୋଇପାରିଲା ।

ସଂଗୀତା ଉତ୍ତର ଦେଇଥିବା ଉକ୍ତିକୁ ଶିକ୍ଷକ ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ଭାବରେ 'A' ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥାନକୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ଲେଖିଲେ ।

ତାହା ହେଲା – **A (90, 160)** ।

କହିଲ ଦେଖି – *କଳାପଟାରେ "B' ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥାନକୁ କିପରି ଲେଖିବ ଯଦି ବାମପାର୍ଶ୍ୱ ରୁ 20ସେ.ମି. ଏବଂ ନିମ୍ନ ପାର୍ଶ୍ୱ ଧାରରୁ 100 ସେ.ମି. ଦୂରତାରେ ବିନ୍ଦୁଟି ଥାଏ ? ତୁମର ଉତ୍ତରଟି ହେବ B (20, 100)*

(ନିଜେ କର) ନିମ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକର ଅବସ୍ଥାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ସଂକ୍ଷିପ୍ତରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଏଗୁଡ଼ିକର ବିସ୍ତୃତ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କର । (ମାପର ଏକକ ସେ.ମି. ରେ ଦିଆଯାଇଛି) (a) M (16, 80), (b) N (100, 35), (c) R (80, 80) ।

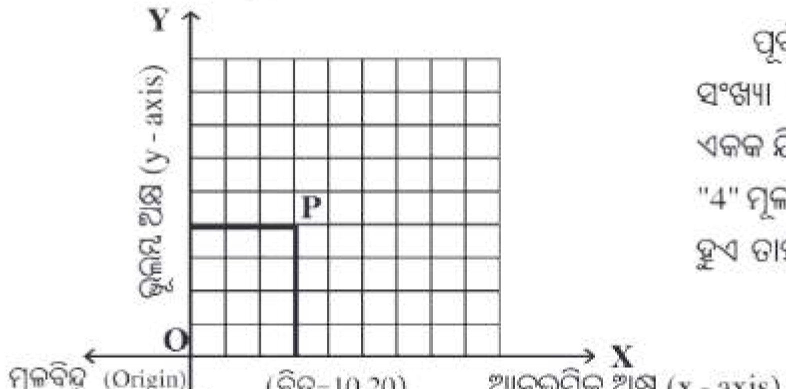
ସପ୍ତଦଶ ଶତାବ୍ଦୀରେ ଫାରାସୀ ଗଣିତଜ୍ଞ **ରେନେ ଡେସ୍‌କାର୍ଟେ (Rene Descartes)** ଥରେ ଗୋଟି ଛାତର ଏକ କଣରେ ଗୋଟିଏ ପୋକର ଚଳ ପ୍ରଚଳକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରୁଥିଲେ । ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟରେ ପୋକଟିର ଅବସ୍ଥାନକୁ ଜାଣିବା ପାଇଁ ଚେଷ୍ଟା କରିଥିଲେ । ଏଥିରୁ ସେ ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଚିହ୍ନଟିକରଣ କରିବାର ଉପାୟ ଉଦ୍ଭାବନ କରିଥିଲେ । ତାଙ୍କର ଉଦ୍‌ଭାବନ, ଦୁଇଟି ମାପାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା କିପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁର ଚିହ୍ନଟ ସମ୍ଭବ ତାହା ସୂଚାଇଥିଲା । ମାପାଙ୍କ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ **ଆନୁଭୂମିକ (Horizontal)** ମାପାଙ୍କ ଥିଲାବେଳେ ଅନ୍ୟଟି **ଉଲ୍ଲମ୍ବ (Vertical)** ମାପାଙ୍କ ଥିଲା । ତାଙ୍କରି ନାମାନୁସାରେ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ଚିହ୍ନଟିକରଣର ପଦ୍ଧତିକୁ **କାର୍ଟେଜୀୟ ପଦ୍ଧତି** ବା **Cartesian system** କୁହାଯାଏ ।

10.8.2. ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Coordinates) :

ମନେକର ତୁମେ ଏକ ପ୍ରେକ୍ଷାଳୟକୁ ଯାଇ ଆଗରୁ ଟିକେଟ୍ କରାଯାଇଥିବା ଆସନ ପାଖକୁ ଯିବ । ତେବେ ତୁମକୁ ତୁମର ଠିକ୍ ଆସନ ପାଇବାକୁ ହେଲେ ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ସହାୟତା ନେବ । ଯଥା : ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଉକ୍ତ ଧାଡ଼ିର ଆସନ ସଂଖ୍ୟା । ସମତଳରେ ଗୋଟିଏ **ବିନ୍ଦୁ ସଂସ୍ଥାପନ (Plotting of a point)**ର ଏହା ଏକ ମୌଳିକ ତଥ୍ୟ । (କଳାପଟାରେ 'A' ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥାନ ପାଇଁ ଯେପରି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ସହାୟତା ନେଉଥିଲେ । ସେଗୁଡ଼ିକ ଥିଲା 90 ଏବଂ 160)

10.9 ସମତଳରେ ବିନ୍ଦୁ ସଂସ୍ଥାପନ (Plotting of Points on a Plane) :

ସମତଳରେ ବିନ୍ଦୁ ସଂସ୍ଥାପନର ଉପାୟ ଜାଣିବାକୁ ହେଲେ ପ୍ରଥମେ ଏକ ଲେଖକାଗଜରେ ବିନ୍ଦୁ ସଂସ୍ଥାପନାର ଉପାୟଗୁଡ଼ିକୁ ଜାଣିବା ଦରକାର । **ଲେଖକାଗଜ (Graph paper)**ରେ କିପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P(3, 4) ର ସଂସ୍ଥାପନ କରିପାରିବା ଆସ ଦେଖିବା ।



(ଚିତ୍ର-10.20)

ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦରୁ ଜାଣିଛ P (3,4) ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରଥମ ସଂଖ୍ୟା '3', ମୂଳ ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ଡାହାଣକୁ କେତେ ଏକକ ଯିବାକୁ ବୁଝାଉ ଥିଲାବେଳେ ଦ୍ୱିତୀୟ ସଂଖ୍ୟା "4" ମୂଳ ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ଉପରକୁ କେତେ ଏକକ ଯିବାକୁ ହୁଏ ତାହା ବୁଝାଇ ଥାଏ ।

ସୂଚନା : x - ଅକ୍ଷ ଓ y - ଅକ୍ଷ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାରେଖା । ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଦ୍ୱୟର କେବଳ 0 ରୁ ଆରମ୍ଭ କରି ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଅଂଶକୁ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

x - ଅକ୍ଷରେ "3" ଏକକ ମୂଳ ବିନ୍ଦୁରୁ ଡାହାଣକୁ ନିଆଯାଇଥିବାରୁ 3 କୁ x - ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x-coordinate) ବା ଭୁଜ (abscissa) ଏବଂ y - ଅକ୍ଷରେ "y" ଅକ୍ଷରେ "4" ଏକକ ମୂଳବିନ୍ଦୁରୁ ଉପରକୁ ନିଆଯାଇଥିବାରୁ 4 କୁ y - ସ୍ଥାନାଙ୍କ (y-coordinate) ବା କୋଟି (ordinate) କୁହାଯାଏ ।

x - ଅକ୍ଷରେ "3" ଏବଂ y - ଅକ୍ଷରେ "4" ଚିହ୍ନିତ ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି P ଯାହାକୁ P(3, 4) ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଇଥାଏ । ଏଠାରେ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (3,4) ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ : (3,4) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଏବଂ (4,3) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ କି ?

ଉଦାହରଣ– 9 : ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଲେଖଚିତ୍ରକୁ ଦେଖି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେ, କେଉଁ ବିନ୍ଦୁ/ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଦତ୍ତ ସ୍ଥାନାଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ ସୂଚାଇ ଥାଏ । ସ୍ଥାନାଙ୍କ : (i) (2,1); (ii) (0,5); (iii) (2,0); (iv) (3,5) ଏବଂ A, H, F ଓ D ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଲେଖ ।

ସମାଧାନ : (i) 'E' ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଏ (2,1) (ii) 'B' ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଏ (0,5)

(iii) 'G'ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଏ (2,0) (iv) 'C'ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଏ (3,5)

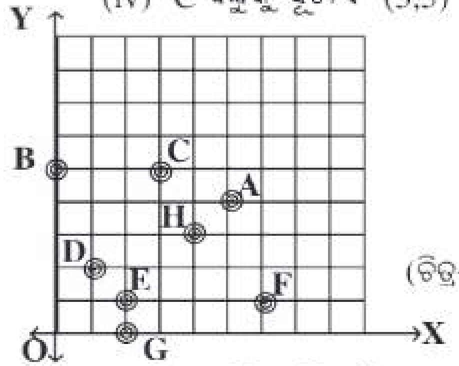
ଏବଂ

(a) "A' ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (5,4)

(b) "H' ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (4,3)

(c) "F' ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (6,1)

(d) "D' ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (1,2)



(ଚିତ୍ର–10.21)

ଉଦାହରଣ – 10 : ଲେଖ କାଗଜରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ମାଧ୍ୟମରେ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନଟ କର । ଯଦି ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥାନ କରନ୍ତି ତେବେ ସରଳରେଖାର ନାମ ଲେଖ ।

(i) J (0,2), K (0,5), L (0,4), M (0,6)

(ii) A (1,1), B (1,2), C (1,3), D (1,6)

(iii) K (1,3), L (2,3), M (3,3), N (4,3)

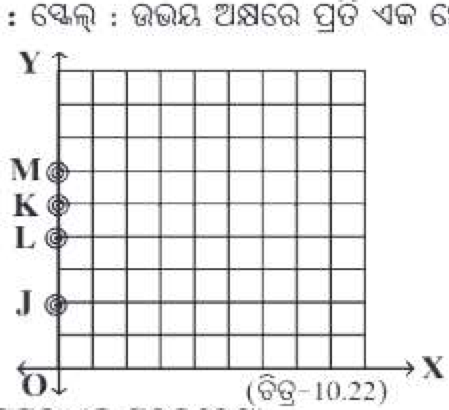
(iv) S (2,0), T (5,0), U (4,0), V (6,0)

(v) P (2,6), Q (3,5), R (5,3), S (6,2)

(vi) E (1,1), F (2,2), G(3,3), H(4,4) ।

ସମାଧାନ : ସ୍କେଲ୍ : ଉଭୟ ଅକ୍ଷରେ ପ୍ରତି ଏକ ଛୋଟ ଘର = 1 ଏକକ

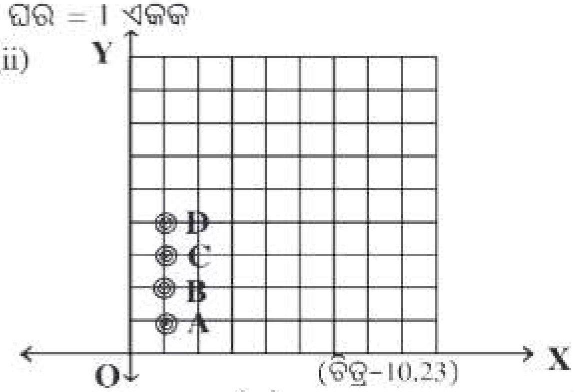
(i)



(ଚିତ୍ର–10.22)

ବିନ୍ଦୁ ସମୂହ ଏକ ସରଳରେଖା y - ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରୁଛନ୍ତି ।

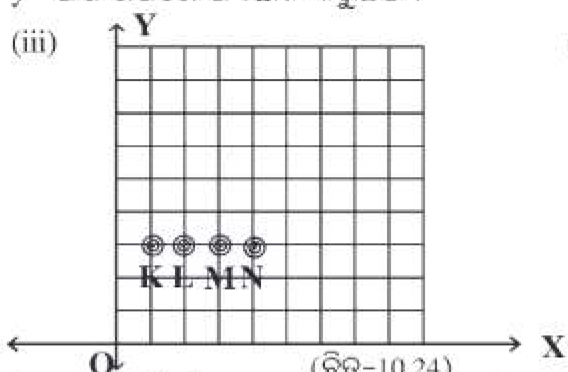
(ii)



(ଚିତ୍ର–10.23)

ବିନ୍ଦୁ ସମୂହ $\overleftrightarrow{AD}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରୁଛନ୍ତି । ଉକ୍ତ ସରଳରେଖା y- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ।

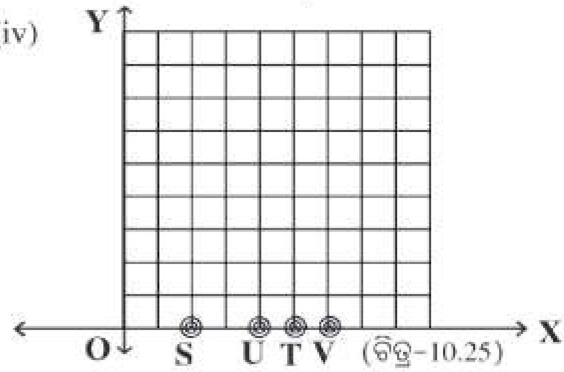
(iii)



(ଚିତ୍ର–10.24)

ବିନ୍ଦୁ ସମୂହ $\overleftrightarrow{KN}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରୁଛନ୍ତି । ଉକ୍ତ ସରଳରେଖା x- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ।

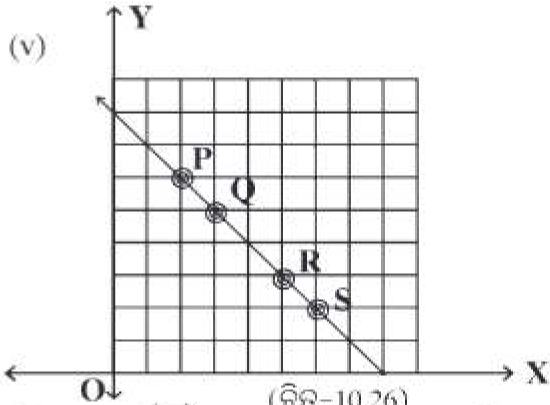
(iv)



(ଚିତ୍ର–10.25)

ବିନ୍ଦୁ ସମୂହ ଏକ ସରଳରେଖା x - ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିଛନ୍ତି ।

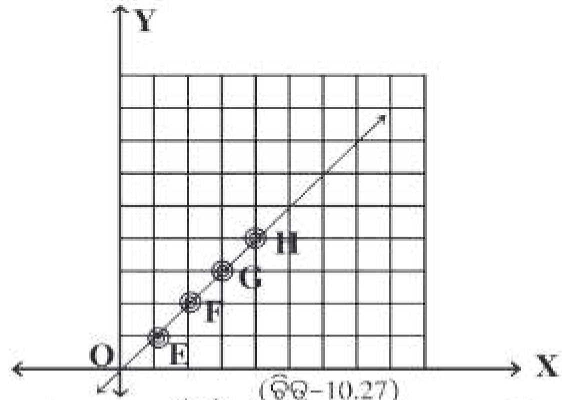
(v)



(ଚିତ୍ର–10.26)

ବିନ୍ଦୁ ସମୂହ $\overleftrightarrow{PS}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରୁଛନ୍ତି ।

(vi)



(ଚିତ୍ର–10.27)

ବିନ୍ଦୁ ସମୂହ $\overleftrightarrow{EH}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରୁଛନ୍ତି ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : (a) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକର x - ସ୍ଥାନାଙ୍କ '0' ହେଲେ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ y - ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ହେବେ ଏବଂ y - ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର x - ସ୍ଥାନାଙ୍କ '0' ହେବ । [ଲେଖଚିତ୍ର – (i)]

(b) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକର y –ସ୍ଥାନାଙ୍କ '0' ହେଲେ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ x- ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ହେବେ ଏବଂ x - ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ '0' । [ଲେଖଚିତ୍ର – (iv)]

(c) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମାନ ହେଲେ (0 ବ୍ୟତୀତ) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ y- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହେଉଥିବା ଏକ ସରଳ ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ହେବେ ଏବଂ y- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହେଉଥିବା ଏକ ସରଳ ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମାନ ('0' ବ୍ୟତୀତ) ହେବ । [ଲେଖ ଚିତ୍ର – (ii)]

(d) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକର y ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମାନ ହେଲେ (0 ବ୍ୟତୀତ) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ x- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହେଉଥିବା ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ହେବେ ଏବଂ x - ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହେଉଥିବା ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର y-ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମାନ (0 ବ୍ୟତୀତ) ହେବ । [ଲେଖଚିତ୍ର – (iii)] ।

ଦର୍ଶାଯାଇଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲେଖଚିତ୍ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ହେତୁ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ **ସରଳରେଖୀୟ ଲେଖଚିତ୍ର (Linear Graph)** ଅଟନ୍ତି ।

10.10 ପ୍ରୟୋଗ (Applications):

ଦୈନିନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଆମେମାନେ ପ୍ରତ୍ୟେକେ କେତେକ ବ୍ୟବହାର୍ଯ୍ୟ ଜିନିଷ ବିକାକିଣା କରିଥାଉ । ଏତଦ୍ ବ୍ୟତୀତ ଜୀବନ ଶୈଳୀର ପରିବର୍ତ୍ତନ ଯୋଗୁଁ ଆମେ କେତେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ କିଛି ବିନିଯୋଗ କରି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ସୁବିଧା ହାସଲ କରିଥାଉ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ –ଘରେ ବ୍ୟବହୃତ ବୈଦ୍ୟୁତିକ ଶକ୍ତି, ମୋଟର କାର୍ ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ପେଟ୍ରୋଲ୍ ଇତ୍ୟାଦି । ଘରେ ବ୍ୟବହୃତ ବିଦ୍ୟୁତ୍ ଶକ୍ତିର ପରିମାଣ ଉପରେ ବିନିଯୋଗ ଅର୍ଥର ପରିମାଣ ନିର୍ଭର କରିଥାଏ । ସେହିପରି ପେଟ୍ରୋଲ୍‌ର ବ୍ୟବହାର ଅନୁଯାୟୀ ପେଟ୍ରୋଲ୍‌ର ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟ ନିର୍ଭର କରିଥାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ ଅଧିକ ପେଟ୍ରୋଲର ବ୍ୟବହାର ପାଇଁ ଅଧିକ ଖର୍ଚ୍ଚ ଏବଂ କମ୍ ପରିମାଣର ପେଟ୍ରୋଲ୍ ବ୍ୟବହାର ପାଇଁ କମ୍ ଖର୍ଚ୍ଚ ପଡ଼ିଥାଏ ।

ଏଠାରେ ପେଟ୍ରୋଲ୍‌ର ପରିମାଣ ଉପରେ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ ନିର୍ଭର କରୁଥିବାରୁ ପେଟ୍ରୋଲ୍‌ର ପରିମାଣକୁ **ସ୍ୱାଧୀନ ଚଳ (Independent variable)** ଏବଂ ପେଟ୍ରୋଲ୍ ପାଇଁ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣକୁ **ସାପେକ୍ଷ ଚଳ (Dependent variable)** କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ଚଳ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସଂପର୍କକୁ ଲେଖଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ମଧ୍ୟ ଦର୍ଶାଯାଇପାରେ । ସେହିପରି 'ବୈଦ୍ୟୁତିକ ଶକ୍ତିର ବ୍ୟୟର ପରିମାଣ'କୁ ସ୍ୱାଧୀନ ଚଳ ଏବଂ ବୈଦ୍ୟୁତିକ ଶକ୍ତି ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣକୁ ସାପେକ୍ଷ ଚଳ କୁହାଯାଏ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣ ଜରିଆରେ ଉପରୋକ୍ତ ଚଳମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସଂପର୍କ ଲେଖ ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ କିପରି ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଛି ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଉଦାହରଣ – 11 : ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ମୋଟର କାର୍ ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ପେଟ୍ରୋଲ୍ ଏବଂ ତା'ର ଆନୁସଂଗିକ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ ଦିଆଯାଇଛି । ଏହାକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ତତ୍ପରେ 12 ଲିଟର ପେଟ୍ରୋଲ୍‌ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

ସାରଣୀ – 24

ପେଟ୍ରୋଲ୍‌ର ପରିମାଣ (ଲିଟରରେ)	5	10	15	20
ପେଟ୍ରୋଲ୍ ପାଇଁ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣ (ଟଙ୍କାରେ)	250	500	750	1000

ସମାଧାନ : ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ସୂଚନା :

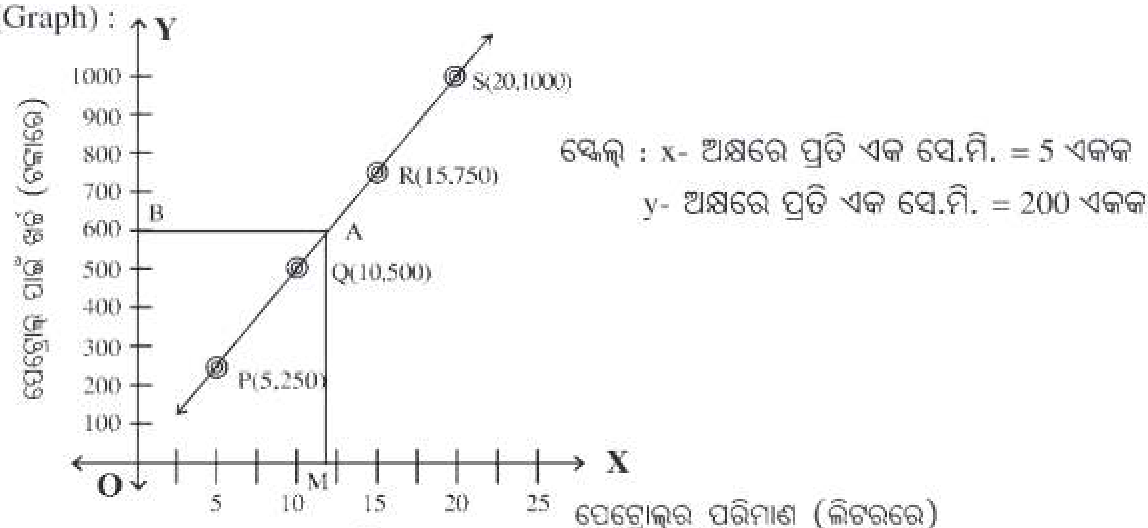
(i) ଲେଖ କାଗଜରେ ଅକ୍ଷ ଦ୍ୱୟ ଚିହ୍ନଟ କରି ଆବଶ୍ୟକତା ଅନୁଯାୟୀ ସ୍କେଲ୍ ଚୟନ କର ।

(ii) x - ଅକ୍ଷରେ ପେଟ୍ରୋଲ୍‌ର ପରିମାଣ ଏବଂ y- ଅକ୍ଷରେ ପେଟ୍ରୋଲ୍ ପାଇଁ ଖର୍ଚ୍ଚର ପରିମାଣକୁ ନିଅ ।

(iii) (5,250), (10,500), (15,750), (20,1000) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନେଇ ଲେଖ କାଗଜରେ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନଟ କର ।

(iv) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍କେଲ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ ସଂଯୋଗ କରି ଲେଖ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

ଲେଖ (Graph) :



(ଚିତ୍ର–10.28)

ବି.ଦ୍ର. : ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଲେଖଚିତ୍ରଟି ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା । ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନରେ ବ୍ୟବହୃତ ଦୁଇଟି ରାଶି ସଳଖ ଚଳନ (Direct Variation) ର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ । ଅନ୍ୟ କଥାରେ ଦୁଇଟି ଚଳରାଶି ସଳଖ ଚଳନର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ହେଲେ, ସେ ରାଶିଦ୍ୱୟକୁ ନେଇ ଅଙ୍କିତ ଗ୍ରାଫ୍ ଏକ ସରଳରେଖା ହେବ ।

12 ଲିଟର ପାଇଁ x - ଅକ୍ଷରେ ବିନ୍ଦୁ 'M' ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କର । ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ଭୂଲମ୍ବ ରେଖା ଲେଖଚିତ୍ରକୁ 'A' ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । A ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ଭୂ–ସମାନ୍ତର ରେଖା y – ଅକ୍ଷକୁ 'B' ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ।

B ବିନ୍ଦୁଟି '600' ସଂଖ୍ୟାକୁ ସୂଚିତ କରୁଥିବାରୁ 12 ଲିଟର ପେଟ୍ରୋଲ୍‌ର କିଣାମୂଲ୍ୟ 600 ଟଙ୍କା ବୋଲି ଜାଣି ପାରିବ ।

ଉଦାହରଣ – 12 :

ଅଜିତ୍ ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି 30 କି.ମି. ବେଗରେ ଗୋଟିଏ ସ୍କୁଟର ନିରବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଭାବେ ଚଳାଇ ପାରୁଥିଲେ । ସମୟ ଏବଂ ଦୂରତାକୁ ନେଇ ଏକ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ଲେଖଚିତ୍ରକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ପ୍ରଦାନ କର ।

(i) ଅଜିତ୍‌କୁ ସ୍କୁଟରରେ 75 କି.ମି. ପଥ ଅତିକ୍ରମ କରିବା ପାଇଁ କେତେ ସମୟ ଲାଗିବ ?

(ii) ଅଜିତ୍ 3 ଘଣ୍ଟା 30 ମିନିଟ୍ ସମୟରେ କେତେ ପଥ ଅତିକ୍ରମ କରିବ ?

ସମାଧାନ : ସାରଣୀ – 25

ସମୟ (ଘଣ୍ଟାରେ)	ଅତିକ୍ରାନ୍ତ ଦୂରତା (କି.ମି.ରେ)
1	30
2	2 X 30 = 60
3	3 X 30 = 90
4	4 X 30 = 120

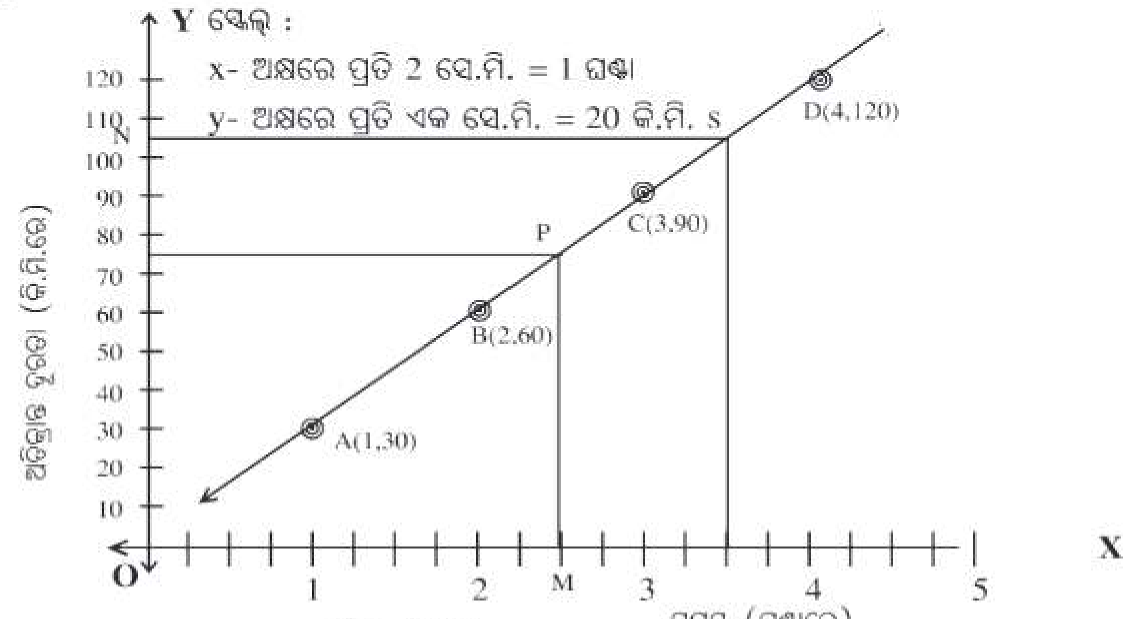
ସମୟ ଏବଂ ଦୂରତା ଚଳରାଶି ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସଂପର୍କକୁ ଲେଖଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବାକୁ ହେବ ।

ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ସୂଚନା:

(i) ଲେଖକାଗଜରେ ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଚିହ୍ନଟ କରି ଆବଶ୍ୟକତା ଅନୁଯାୟୀ ସ୍କେଲ୍ ଚୟନ କର ।

(ii) x- ଅକ୍ଷରେ ସମୟ (ଘଣ୍ଟାରେ) ଏବଂ y- ଅକ୍ଷରେ ଅତିକ୍ରମ କରୁଥିବା ଦୂରତା (କି.ମି.ରେ) କୁ ନିଅ ।

(iii) (1,30), (2, 60), (3, 90) ଏବଂ (4, 120) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖକାଗଜରେ ଚିହ୍ନଟ କର । ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକୁ ସଂଯୋଗ କରି ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର–10.29)

(v) (a) y - ଅକ୍ଷରେ 75 କି.ମି. ପାଇଁ x –ଅକ୍ଷରେ ଏକ ଅନୁରୂପ ବିନ୍ଦୁ (M) ଚିହ୍ନଟ କର ଯାହାର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା 2.5 ହେବ । ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାଗଲା ଯେ, 75 କି.ମି. ପଥ ଅତିକ୍ରମ କରିବା ପାଇଁ 2 ଘଣ୍ଟା 30 ମିନିଟ୍ ଲାଗିବ ।

(b) x - ଅକ୍ଷରେ 3.30 ଘଣ୍ଟା ପାଇଁ y – ଅକ୍ଷରେ ଏକ ଅନୁରୂପ ବିନ୍ଦୁ (N) ଚିହ୍ନଟ କର ଯାହାର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା 105 ହେବ । ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାଗଲା ଯେ, 3.30 ଘଣ୍ଟାରେ ଅଜିତ୍ 105 କି.ମି. ପଥ ଅତିକ୍ରମ କରି ପାରିବ ।

ନିଜେ କର

1. ଉଦାହରଣ - 11 ରେ ଅଙ୍କିତ ଲେଖଚିତ୍ରକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରି ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।
(ଆବଶ୍ୟକ ପଡ଼ିଲେ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର)

(i) 18 ଲିଟର ପେଟ୍ରୋଲ୍‌ର ଦାମ୍ କେତେ ?

(ii) 850 ଟଙ୍କାରେ କେତେ ଲିଟର ପେଟ୍ରୋଲ୍ କିଣାଯାଇ ପାରିବ ?

2. ଉଦାହରଣ - 12 ରେ ଅଙ୍କିତ ଲେଖଚିତ୍ରକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରି ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(ଆବଶ୍ୟକ ପଡ଼ିଲେ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର)

(i) 1 ଘଣ୍ଟା 36 ମିନିଟ୍ ସମୟରେ ଅଜିତ୍ ଅତିକ୍ରମ କରିଥିବା ଦୂରତାକୁ କି.ମି.ରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(ii) 50 କି.ମି. ଅତିକ୍ରମ କରିବାରେ ଅଜିତ୍‌କୁ କେତେ ସମୟ ଲାଗିବ ?

ଅନୁଶୀଳନୀ – 10 (b)

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନଗୁଡ଼ିକୁ ପୂରଣ କର ।

(a) ଲେଖଚିତ୍ରର ଆନୁଭୂମିକ ଅକ୍ଷକୁ .... କୁହାଯାଏ ।

(b) ଲେଖଚିତ୍ରର ଭୂଲମ୍ବ ଅକ୍ଷକୁ .... କୁହାଯାଏ ।

(c) ମୂଳ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ .... ।

(d) (0,5) ସ୍ଥାନାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଟି .... ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବ ।

(e) (3,0) ସ୍ଥାନାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଟି .... ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବ ।

(f) x- ଅକ୍ଷରେ ଅବସ୍ଥାନ କରୁଥିବା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ .... ।

(g) y- ଅକ୍ଷରେ ଅବସ୍ଥାନ କରୁଥିବା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ .... ।

(h) (3, 4) ସ୍ଥାନାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ .... ।

(i) (0, 1) ସ୍ଥାନାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁର କୋଟି .... ।

(j) A(3, 2), B(0,2), C(3,0) ସ୍ଥାନାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ .... x- ଅକ୍ଷରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବ ।

2. ଦତ୍ତ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଏକ ଲେଖ କାଗଜରେ ଚିହ୍ନଟ କର ।

A(3, 0), B(5, 2), C(1, 4), D (0, 6) ଏବଂ E (2, 2)

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦତ୍ତ ସ୍ଥାନାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଲେଖ କାଗଜରେ ଚିହ୍ନଟ କର ଏବଂ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ରୁଲାର ସାହାଯ୍ୟରେ ଯୋଗ କର ।

(a) (1, 1), (2, 2), (3, 3) ଏବଂ (4, 4)

(b) (2, 0), (5, 0), (1, 0) ଏବଂ (3, 0)

(c) (0, 2), (0, 4), (0, 3) ଏବଂ (0, 5)

4.(a) x - ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର କରି ଏକ ରେଖା ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ଏହା ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ପାଞ୍ଚଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କରି ସେଗୁଡ଼ିକର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଲେଖ । ସେ ସ୍ଥାନାଙ୍କଗୁଡ଼ିକରେ କେଉଁ ସାଧାରଣ ଧର୍ମ ପରିଲକ୍ଷିତ ହେଉଛି ଲେଖ ।

(b) y - ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର କରି ଏକ ରେଖା ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ଏହା ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ପାଞ୍ଚଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କରି ସେଗୁଡ଼ିକର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଲେଖ । ସେ ସ୍ଥାନାଙ୍କଗୁଡ଼ିକରେ କେଉଁ ସାଧାରଣ ଧର୍ମ ପରିଲକ୍ଷିତ ହେଉଛି ଲେଖ ।

5. ନିମ୍ନରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଦିଆଯାଇଛି । ସେଗୁଡ଼ିକର ପରିସୀମା ସ୍ଥିର କର । ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ସଂପୃକ୍ତ ପରିସୀମାକୁ ଯଥାକ୍ରମେ x-ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଓ y-ସ୍ଥାନାଙ୍କ ରୂପେ ନେଇ ଲେଖ - କାଗଜରେ ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ସଂସ୍ଥାପନ କର ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ରୁଲାର୍ ସାହାଯ୍ୟରେ ଯୋଗକରି ଦେଖ ଯେ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଏକ ରେଖା ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବେ ।

ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ : 2 ସେ.ମି., 3 ସେ.ମି., 4 ସେ.ମି. ଏବଂ 5 ସେ.ମି.

6. ନିମ୍ନ ସାରଣୀଟି 3 ର ଗୁଣିତକମାନଙ୍କୁ ଦର୍ଶାଏ ।

ସାରଣୀ - 26

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

(1,3), (2,6), (3, 9) ସ୍ଥାନାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖକାଗଜରେ ଚିହ୍ନଟ କରି ସେଗୁଡ଼ିକୁ ରୁଲାର୍ ସାହାଯ୍ୟରେ ଯୋଗ କର । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଚିହ୍ନିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ଏକ ରେଖିୟ ହେବେ ।

7. ଗୋଟିଏ ଲୁହାକୁ ଉତ୍ତପ୍ତ କରାଗଲା । ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ସମୟ ବ୍ୟବଧାନ ଏବଂ ତାପମାତ୍ରାକୁ ଲିପିବଦ୍ଧ କରାଯାଇଛି । (ସମୟ, ତାପମାତ୍ରା) ଆଧାରରେ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖକାଗଜରେ ଚିହ୍ନଟ କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଏହା ଏକ ସରଳରେଖୀୟ ଲେଖଚିତ୍ର ।

ସାରଣୀ - 27

ସମୟ (t) (ସେକେଣ୍ଡରେ)	2	5	7	12
ତାପମାତ୍ରା (T) (ସେଣ୍ଟିଗ୍ରେଡ୍‌ରେ)	19	25	29	39

ଲେଖଚିତ୍ରଟି ଅଙ୍କନ କରି ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(a) t = 0 ସମୟରେ ତାପମାତ୍ରା କେତେ ଥିଲା ?

(b) t = 6 ସମୟରେ ତାପମାତ୍ରା କେତେ ଥିଲା ?

*****

ଉତ୍ତରମାଳା

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 1)

1. ଠିକ୍ ଉକ୍ତି : (i), (iv), (vi), (ix) ଏବଂ (xi); ଅବଶିଷ୍ଟ ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି ।

2. (i) $\in$ (ii) $\subset$ (iii) $\subset$ ବା $=$ (iv) $\notin$ (v) $\subset$ (vi) $\supset$, **3.** (i) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (ii) $\{2, 4, 6, 8\}$ (iii) $\{2\}$ (iv) $\{2,4,6,8\}$, (v) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, (vi) {ସୋମ, ମଙ୍ଗଳ, ବୁଧ, ଗୁରୁ, ଶୁକ୍ର, ଶନି, ରବି}, (vii) { }, (viii) $\{8,16\}$;

4. (i) {x | x ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଓ $x < 12$}, (ii) {x | x ଇଂରାଜୀ ବର୍ଣ୍ଣମାଳାର ଗୋଟିଏ ସ୍ୱରବର୍ଣ୍ଣ} (iii) {x | x ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା, $-2 \le x \le 2$}, (ii) {x | ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା, $x < 14$ } (v) $\{2n \mid n \in N\}$ (vi) {3n | $n \in N$ ଏବଂ $n \le 5$ }, (vii) {x | $x = 5^n$, $n \in N$ ଏବଂ $n \le 4$} (viii) {x | x ଇଂରାଜୀ ବର୍ଣ୍ଣମାଳାର ଏକ ଅକ୍ଷର}, (ix) $\{x \mid x = 2^n,\ n \in N\}$

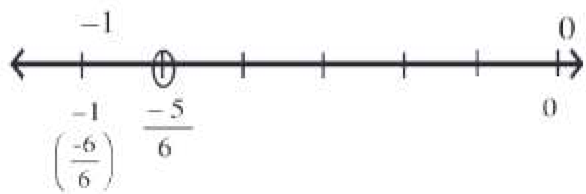
5. (i) {m, a, t, h, e, i, c, s}, (ii) {a, r, i, t, h, m, e, c}, (iii) {p, r, o, g, a, m, e}, (iv) {c, o, m, i, t, e}
6. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $A \cap B = \{2, 4, 6\}$, **7.** $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{5, 6\}$, **8.** (i) $\{1, 2, 3, 4,5\}$, (ii) $\{2,4\}$, (iii) $\{2\}$, (iv) $\{1,2, 3, 4, 6\}$, (v) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, (vi) $\{2,3\}$, **9.** (i) $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, (ii) $\{4, 5\}$, (iii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, (iv) $\{1,3\}$, (v) $\{2, 6, 7\}$, **10.** (i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, (ii) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$, (iii) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, (iv) $A \cup \phi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, (v) $A \cap \phi = \{\ \}$ ବା ϕ,
11. (a) {a, b}, {e, f}, (b) {a, b, e, f}, (c) ϕ ବା { }

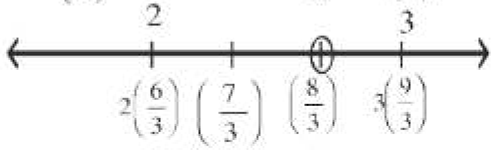
(ଅନୁଶୀଳନୀ – 2 (a))

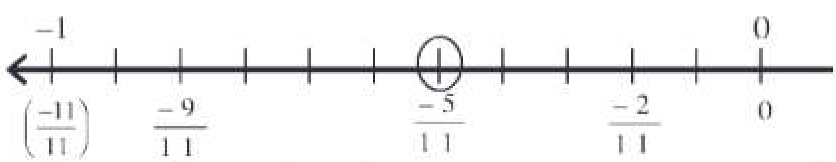
1. (i) $-\frac{2}{8}$, (ii) $\frac{5}{9}$, (iii) $\frac{-6}{5}$, (iv) $\frac{2}{9}$, (v) $\frac{19}{6}$, **2.** (i) $-\frac{1}{13}$, (ii) $\frac{19}{13}$, (iii) 5, (iv) $\frac{56}{15}$, (v) $\frac{5}{2}$ (vi) -1,
3. (i) (ଗୁଣନାତ୍ମକ) ଅଭେଦ ନିୟମ, (ii) ଗୁଣନର କ୍ରମ ବିନିମୟୀ ନିୟମ, (iii) (ଗୁଣନାତ୍ମକ) ବିଲୋମୀ ନିୟମ, (iv) ଗୁଣନର ସହଯୋଗୀ ନିୟମ, **4.** $\frac{-96}{91}$, **5.** ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ, **6.** ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ, **7.** (i) 0, (ii) 1 ଓ -1, (iii) 0
8. (i) ନାହିଁ, (ii) 1 ଓ -1 (iii) $-\frac{1}{5}$ (iv) x (v) ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (vi) ରଣାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 2 (b))

1. (i)

(ii)


(iii)


2.


3. (i) $1, \frac{1}{2}, 0, -1, -\frac{1}{2}$, (ii) $-\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ (ଅନ୍ୟ ଉତ୍ତର ମଧ୍ୟ ସମ୍ଭବ), **6.** (i) $\frac{5}{7}$ (ii) $\frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{7}$

(ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (c))

1. (a) $1234 \times 9 + 4 = 11110$
$12345 \times 9 + 5 = 111110$

(b) $1234 \times 8 + 4 = 9876$
$12345 \times 8 + 5 = 98765$

(c) $1537 \times 10001 = 15371537$
$24631 \times 100001 = 2463124631$

(d) $16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$
$25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 31 + 32 + 33 + 34 + 35$

(e) 1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

(f) $7^2 - 6^2 = 7 + 6 = 13$
$8^2 - 7^2 = 8 + 7 = 15$

2. (i)

	29	
83	23	17
	71	

(ii)

		23		
		37		
13	47	17	73	11
		41		
		43		

3. (i) $x = 2$, $y = 4$, (ii) $x = 2$, $y = 3$, $z = 6$, (iii) A= 3, C= 7; (iv) A = 1, B = 0, C = 8, D = 9, (v) A = 3, B = 7, P = 11, (vi) A = 7, B = 3, P = 9, (vii) ଓ (viii) A, B, C ର ମାନ ଯେକୌଣସି ଏକ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇପାରେ ।

4. (a) 24, 210, 86, (b) 5 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା : 105, 420, 235, 930, 715; 5 ଓ 2 ଉଭୟ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା : 420, 930, (c) 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା : 78, 504, 216, 774, 804; (d) 501, 213, 102, 462 ଓ 2 ଉଭୟ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା : 420, 930, **5.** (a) 0,6 (b) 1, 4 (c) 2,2 (d) 1,4 (e) 2,5;

6. (i), (iv), (v) : ଠିକ୍ ଉକ୍ତି, **7.** (ii), (iv), (v) : ଠିକ୍ ଉକ୍ତି

(ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (a))

1. (i) 2, $5x$ (ii) 5, $12x$, (iii) -6, 4, $-2x$ (iv) -2, -3, $-5x$ (v) 1, -2, $-x$

2.(i) $7x$,(ii) $-x$, (iii) $-5x^3$, (iv) $-3x^2$ (v) $4x - 4$ (vi) $3x^2 + 2$ (vii) x^2+x (viii) $x^2 + 3x + 4$

3.(i) $5x$, (ii) $7x$, (iii) $4x$, (iv) $3x$, (v) $5x$, $7x$ (vi) $2x + 5y$, $5y$.

4.(i) $10x$, (ii) $9x^2$ (iii) $9x^3$ (iv) $4x^2 + 5x$ (v) $x^3 - x^2 + x + 7$ (vi) $2x^2 + 2x$ (vii) $2x^2$, (viii) $2x^2+6x-4$, (ix) $6x^2 - x + 4$ (x) 0 ;

(ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (b))

1. (i) $-3x$, 5, -3, $2x$ (ii) $2x$, 3, 2, $5x$ (iii) $-3x$, -2, -3, $-5x$, (iv) $-3 + 2x$, $2x - 1$, $5x$ (v) $3x - 2$, $-4 - 2$, $4x$, -6; **2.** (i) $3x$ (ii) $8x$ (iii) $-5x$ (iv) $2x$ (v) $-2x$ (vi) $2 - x^2 - x$ (vii) $x^2 - 4x - 6$;

3. (i) $2x$ (ii) $4x^2$ (iii) $x^2 - 4x$ (iv) $2x^2 + 4$ (v) $x^2 - 10x$ (vi) $6x + 8$ (vii) $x^3 - 30x - 8$

(ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (c))

1. (i) $15x$, (ii) $6x^4$, (iii) 0, (iv) $3x^3$, **3.** (i) -7 (ii) 1 (iii) $-x$, -6 (iv) $-3x^2$, 4

4. (i) $x^2 - 1$ (ii) $x^3 - 1$ (iii) $x^3 + 1$ (iv) $2x^2 - 3x - 2$ (v) $2x^3 - x^2 + 4x + 15$ (vi) $-x^3 + 2x^2 + 17x + 6$ (vii) $x^4 - 1$ (viii) $2x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 1$, (ix) $x^4 + x^3 - x - 1$

(ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (d))

1. (i) $4x$, (ii) $6x$, (iii) $-4x^2$, (iv) $-5x$, **2.** (i) $2x$ (ii) $-2x$ (iii) $-2x$, (iv) $2x$; **3.** (i) $7x^2$ (ii) $-7x$ (iii) $-3x$, (iv) 7, (v) -7; **4.** (i) $3x^2+2$ (ii) $4x^2 - 3$ (iii) $6x^2 - 2x + 3$ (iv) $4x + 3$, (v) $6x + 5$, (vi) $-12x + 11$

(ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (e))

1. (i) $6x^2 + 3x$, (ii) x, (iii) $3x^2 + 2$, (iv) 1, (v) $12x^2 + 8x + 2$; **2.** (i) $x - 7$, (ii) $x - 4$, (iii) $x + 5$, (iv) $x - 1$, (v) $x^2 - x + 1$, (vi) $x^2 + x + 1$ (vii) $x^2 - x + 1$, (viii) $-x^2 + 5x - 6$, (ix) $x^2 - x - 2$,

(x) $2x^2 + 3x + 2$, **3.** (i) (x+14), 42 (ii)(x–11),19(iii) (2x – 2), –9 (iv) $(9x^2 + 2)$,3, (v) $4x^2 - 2x + 1$, – 2 (vi) $- x^2 + x - 1$, –2, **4.** (i) – 14, (ii) 2, (iii) – 2

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 3 (f))

1. (i) 4, (ii) 2y, (iii) –4y, (iv) 4xy, (v) (a – b); **2.** (i) $b^2 + 2bc + c^2$, (ii) $16+8b+b^2$, (iii) $r^2 - 20r + 100$, (iv) $9n^2 + 12n + 4$, (v) $4m^2 + 4mn + n^2$, (vi) $49p^2 - 14pq + q^2$, (vii) $4x^2 + 12xy + 9y^2$, (viii) $4m^2 + 9n^2 + p^2 - 12mn + 6np - 4mp$, (ix) $x^2 + y^2 + 16z^2 - 2xy - 8yz + 8xz$, (x) $a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab + 12bc + 6ac$; **3.** (i) 10404, (ii) 92416, (iii) 1006009, (iv) 16008001; **4.** (i) 9801, (ii) 996004, (iii) 89991, (iv) 6396, (v) 79.21, (vi) 9.975, (vii) 200, (viii) 0.08, (ix) 1800; **5.** (i) 10712, (ii) 26.52, (iii) 10094, (iv) 95.06; **6.** (i) $x^2 + 6x + 9$, (ii) $4y^2+20y+25$, (iii) $4a^2 - 28a + 49$, (iv) $1.21m^2 - 0.16$, (v) $b^2 - a^2$, (vi) $36x^2 - 49$, (vii) $p^2 - 25$, (viii) $9y^2 - 4x^2$, (ix) $x^2 - 1$, (x) $16y^2 - 81$; **7.** (i) $x^2 + 10x + 21$, (ii) $16x^2 + 24x + 5$, (iii) $16x^2 - 24x + 5$, (iv) $16x^2 + 16x - 5$, (v) $4a^4 + 28a^2 + 45$, (vi) $x^2y^2z^2 - 6xyz + 8$; **8.** (i) $2a^2 + 2b^2$, (ii) 40x, (iiii) $98m^2 + 128n^2$, (iv) $41m^2 + 80mn + 41n^2$, (v) $4p^2 - 4q^2$, (vi) $a^2b^2 + b^2c^2$, (vii) $m^2 + n^2m^2$, (viii) $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 4ca$, (ix) $8a^2 + 10b^2 + 26c^2 - 16ab - 4bc + 16ac$, (x) $8x^2 + 12y^2 - 20xy - 12yz + 8xz$; **9.** (i) $(2x + 3y)^2$, (ii) $(8m - 3n)^2$, (iii) $(2x - 1)^2$, (iv) $(x + 2y + z)^2$, (v) $(2x - y - z)^2$, (vi) $(3x - 2y + z)^2$

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 4 (a))

1. 12 (x + 3), **2.** 4 (2a + b), **3.** 11 (2y – 3z), **4.** 7 pq (2 + 5r), **5.** 5a (2ab + 1), **6.** 5abc (3a – 2b), **7.** $2a (4a^2 + 2a + 1)$, **8.** $5a^3b^3c^3 (6 + 5a^2c^3 - 3a^3b^3c^3)$, **9.** 10 (2x + 5), **10.** (2x + 3y) (5a – 2b), **11.** 4 (5x + 9y) (10x + 18y + 3), **12.** 3a (6a – 5b) (3 – 4a), **13.** (x – 2y) (5x – 10y + 3), **14.** 2 (a + 2b) (3 – 2a – 4b), **15.** (a – 1) (a + b), **16.** (x – y) (x – y + 1), **17.** (x – y) (a + 2b + c), **18.** (b – c) (a + b + c), **19.** x^2 (a – 2b) (x + 1), **20.** 2 (x + y) (4b – 3a), **21.** 5 (a + b) (x – y), **22.** $(x + y) (a^2 + b^2 + x^2)$

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 4 (b))

1. (x + y) (x + 8), **2.** (q + r) (p +q), **3.** (a + d) (b + c), **4.** (p + r) (q + r), **5.** (5y – 2) (3x + 1), **6.** (a + b) (x – y), **7.** (5p + 3) (3q + 5), **8.** (a + 3b) (2 – 3a – 9b), **9.** (a +2)(a + b), **10.** (x – z) (x + y), **11.** (a – b) (a – c), **12.** (2p – q) (p – r), **13.** (x – 3) (x + 2), **14.** (2x – 5) (x + 2), **15.** $(x + 1) (x - y^2)$, **16.** $(lm - n^2) (m - l)$, **17.** $(x - 2y) (x^2 + 3y^2)$, **18.** (6a – b) (b + 2c), **19.** (x – 11y) (x – 1), **20.** (3a + 4b) (x – 2y)

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 4 (c))

1. (i) (a + 3) (a + 5), (ii) (x + 2) (x + 3), (iii) (x + 6) (x + 1), (iv) (x + 6) (x + 2), (v) (x + 3) (x + 8), (vi) (x+1) (x+1); **2.** (i) (p – 4) (p –6), (ii) (x– 2) (x – 6), (iii) (x – 2) (x – 5), (iv) (x – 2) (x – 7), (v) (x + 7) (x – 3), (vi) (x –2) (x –1); **3.** (i) (a + 1) (a – 5), (ii) (x + 3) (x – 14), (iii) (x + 3) (x – 7), (iv) (x + 9) (x – 10), (v) (x + 7) (x – 9), (vi) (x–2) (x+1); **4.** (i). (a+7) (a + 11), (ii) (a –6) (a –2), (iii) (x + 2) (x – 4), **5.** (a–9) (a+6), **6.** (x– 2y – 3)(x – 2y – 2)

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 4 (d))

1. (i) (2x + 1) (2x + 1), (ii) (3b + 2c) (3b + 2c), (iii) (4a + 5b) (4a +5b), (iv) (7x + 8y) (7x + 8y), (v) $(a^2 + 3b^2) (a^2 + 3b^2)$;

2. (i) (3x – 1) (3x –1), (ii) (4x– 5y) (4x – 5y), (iii) (7a – 9b) (7a – 9b), (iv) (8a – 1) (8a – 1), (v) $(10a^2 - b) (10a^2 - b)$;

3. (i) (4x + 3y+5z) (4x + 3y+5z), (ii) (7x + 5y+z) (7x + 5y+z), (iii) (2a + 3b–c) (2a + 3b–c), (iv) (10a – 9b–7c) (10a – 9b–7c), (v) $(x^2 - y - z) (x^2 - y - z)$;

4. (i). (4a+3b) (4a–3b), (ii) (5a +6b) (5a –6b), (iii) (9a + 10b) (9a – 10b), (iv) (4a+7b) (4a–7b), (v)(12a + 15b)(12a – 15b) or 9(4a + 5b) (4a – 5b), (vi) (16a + 17b) (16a – 17b),

(vii) $(20a + 15b)(20a - 15b)$ or $25(4a+3b)(4a - 3b)$, (viii) $(21a + 30b)(21a - 30b)$ or $9(7a + 10b)(7a - 10b)$, (ix) $(11a + 17b)(11a - 7b)$, (x) $(9a + 19b)(9a - 19b)$, (xi) $(a + b + c)(a + b - c)$, (xii) $(a + b - c)(a-b + c)$,

5. $(a^2+1+a)(a^2+1-a)$, (ii) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$, (iii) $(x^2 + 36y^2 + 6xy)(x^2 + 36y^2 - 6xy)$, (iv) $(x^2 + 3xy + 9y^2)(x^2 - 3xy + 9y^2)$, (v) $(x^2 + 4x + 16)(x^2 - 4x + 16)$,

6. (i) $(a + 3 + b)(a+3 -b)$, (ii) $(a- 2 + c)(a - 2 - c)$, (iii) $(2a -1 + 3b)(2a -1 - 3b)$, (iv) $(a -3b+4c)(a -3b -4c)$, (v) $(4a - 3b + 5c)(4a - 3b - 5c)$,

7. (i) $(x + 13)(x -15)$, (ii) $(x+ 21)(x -17)$, (iii) $(x +14)(x - 8)$, (iv) $(x+31)(x -29)$, (v) $(x - 27)(x+23)$, (vi) $(x -19)(x+9)$, (vii) $(x -33)(x + 27)$, (viii) $(x+16)(x-12)$

ଅନୁଶୀଳନୀ – 5 (a)

1. (i) 2^4, (ii) $(-2)^5$, (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$, (iv) $\left(-\frac{1}{7}\right)^4$, (v) $\left(\frac{5}{3}\right)^3$

(vi) y^5 (vii) $(-p)^3$, (viii) $(a -b)^4$, (ix) $(a + b)^3$, (x) $\left(\frac{a}{b}\right)^5$

2.

କ୍ରମିକ ନମ୍ବର	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)	(viii)	(ix)	(x)
ଆଧାର	1	–1	–1	9	–2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	10	10	–10
ଘାତ	15	11	18	5	5	6	5	4	7	5
ମାନ	1	–1	1	59049	–32	$\frac{1}{64}$	$\frac{32}{243}$	10000	10000000	–100000

3.

ପ୍ରଶ୍ନ	୧ମ	୨ୟ	୩ୟ	୪ର୍ଥ	୫ମ	୬ଷ୍ଠ	୭ମ	୮ମ
ଉତ୍ତର	64	729	2	5	4	5	$-\frac{1}{128}$	$-\frac{1}{3}$

4. (i) 10000, (ii) ଚତୁର୍ଥ, (iii) ତୃତୀୟ, (iv) $-\frac{3}{2}$ (v) $\frac{1}{25}$ **5.** (i) ତୃତୀୟ, (ii) 25, (iii) 64

ଅନୁଶୀଳନୀ – 5 (b)

1. (i) 3^{10}, (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{11}$ (iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$, (iv) $(-4)^9$, (v) $\frac{3}{2}$, (vi) $(4)^9$, (vii) $(3)^{18}$, (viii) $(2)^{17}$, (ix) $(-7)^{13}$, (x) $(2)^7$, (xi) $(5)^{12}$, (xii) $(-2)^{12}$ ବା 2^{12}, (xiii) $\left(\frac{7}{3}\right)^4$, (xiv) $\left(\frac{3}{4}\right)^9$ (xv) $\left(\frac{a}{b}\right)^{10}$, (xvi) $\left(\frac{-a}{b}\right)^7$

2.(i) 9, (ii) 972, (iii) 8, (iv) 64, (v) $\frac{6651}{256}$; **3.** (i) 512, (ii) a^8b^7, (iii) a^7b^4, (iv) 1, (v) 1

4.(i) 2^{18}, (ii) 3^{14}, (iii) $5^{(3m-3)}$, (iv) $(-2)^{33}$. **5.** (i) F, (ii) T, (iii) F, (iv) T, (v) T, (vi) F, (vii) T, (viii) F, (ix) F, (x) T; **6.** (i) (iv) (v) (vii) (viii) ଓ (x)

ଅନୁଶୀଳନୀ – 5 (c)

1. (i) $\frac{1}{4}$, (ii) $\frac{1}{16}$ (iii) $\frac{1}{27}$, (iv) $\frac{1}{243}$, (v) $\frac{1}{10000}$, (vi) $\frac{1}{125}$, (vii) $\frac{1}{8000}$, (viii) $\frac{1}{125000}$, (ix) $\frac{1}{100}$, (x) $\frac{1}{100000}$, (xi) –1, (xii) –1; **2.**(i) 9, (ii) $\frac{125}{8}$, (iii) 10000, (iv) 0.008 ବା $\frac{1}{125}$, (v) $\frac{125}{27}$, (vi) $\frac{1000}{27}$, (vii) –1, (viii) 1, **3.** (i) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-6}$, (ii) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$, (iii) $\left(-\frac{1}{6}\right)^{-3}$, (iv) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$, (v) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}$, (vi) 8^{-3} (vii) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-6}$

ଅନୁଶୀଳନୀ – 5 (d)

1. (i) 16, (ii) 32 (iii) 3125, (iv) $\frac{3}{5}$, (v) 36, (vi) 243, **2.**(i) 2, (ii) 4, (iii) 81, (iv) $\frac{1}{2}$, (v) 625, (vi) $\frac{7}{2}$,

3. (i) 1, (ii) 1, **4.** (i) $a -b$, (ii) $x - y$

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 6 (a))

1. 729, 1369, 2116, 13924, 50625;

3. 28, 278, 314, 23872...... ବର୍ଗ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା

113, 4315, ... ବର୍ଗ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା

5. $10^2 - 9^2$, $14^2 - 13^2$, $16^2 - 15^2$, $21^2 - 20^2$, $27^2 - 26^2$, **6.** (7, 24, 25), (11, 60, 61), (15, 112,113), (12,35,37), (16, 63, 65), **8.** 35, 49, 223, 341 **9.**(a), (b), (c), (d), (f), (g) - ଭୁଲ୍ (c), (e) - ଠିକ୍

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 6 (b))

1. 2025, 3025, 7225, 11025, 24025, 65025, **2.** 729, 1369, 2116, 6084, 9604,

3. 361, 10404, 11449, **4.** 8649, 9025, 9604, **5.** 2601, 2916, 3136, 3364, 3481, **6.** 1225, 5626, 9025, 13225, 42025; **7.** 0.0144, 1.2321, 0.000009, **8.** 121, 65.61, 0.36

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 6 (c))

1. (a) 0.6, (b)1.1 (c) $1\frac{1}{3}$ (d) 0.03, (e) $2\frac{1}{2}$, **2.** 17, 19, 28, 2.5, 3.6, 4.4, 3.2, **3.** 305, 316, 329, 273, 1502, 1371, 231, **4.** 7.29, 6.03, 2.098, 0.99, 2.34, **5.** (i) 2.236, (ii) 2.645, (iii) 3.162, (iv) 1.581, (v)1.897, **6.** 1.117, 1.666, 2.015, 1.811, 2.136, **7.** (i) 3.535, (ii) 1.539, (iii) 3.732, (iv) 0.102, (v) 9.898

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 6 (d))

1. 961 ଏବଂ 1024, **2.** 50, **3.** 35, **4.** 3, **5.** 48, **6.**144 ମିଟର, **7.** 150 ମିଟର, **8.** 580 ଟଙ୍କା, **9.** 120 ଜଣ, **10.** 40, **11.** 25, **12.** 46.24 ମି.

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 6 (e))

1. 1331, 1728, 2197, 2744, 3375, 4096, 4913, 5832, 6859, 8000

2. (i) 12, (ii) 55, (iii) 60, (iv) 3, (v) 3; **3.** 216, **4.** 5, **5.** 5; **6.**3375 ଘ. ସେ.ମି., **7.** 8; **8.** 43200 ଟଙ୍କା,

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 6 (f))

1. (i) 7, (ii) 10, (iii) 42, (iv) 54, (v) 200; **2.** 1, 14; **3.** 2.14; **4.** 64, ବ.ମି., **5.** 5, 25

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 6 (g))

1. –1, –5, –18, –26, – 140; **2.** 8; **3.** –72; **4.** –56; **5.** 75; **6.** 225; **7.** –77, **8.** 60; **9.** 14; **10.** –9; **11.** 12; **12.** ପୂର୍ଣ୍ଣ ଘନରାଶି, –64,. – 1728, –2197 ଏବଂ ଘନମୂଳ – 4, –12, – 13

13. (i) –30, (ii) –72, (iii) – 300, (iv) – 80

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 6 (h))

1. (i) $\frac{343}{729}$, (ii) $\frac{-512}{1331}$, (iii) $\frac{1728}{343}$, (iv) $\frac{-2197}{512}$, (v) $17\frac{72}{125}$, (vi) $34\frac{21}{64}$, (vii) $-\frac{125}{27}$, (viii) 0.008 (ix) 2.197, (x) 0.000027; **2.** (i) $\frac{2}{5}$, (ii) $-\frac{4}{11}$, (iii) $\frac{-3}{16}$, (iv) $\frac{13}{21}$, (v) 0.1 (vi) 0.2, (vii) 1.2, (viii) 0.05; **3.** (i), (iii), (iv) (vi)

(ଅନୁଶୀଳନୀ – 7 (a))

1. (i) 9, (ii) 7, (iii) 4, (iv) 21, (v) 5, (vi) 5, (vii) 50, (viii) 2.4, (ix) –11, (x) 2.1

2. (i) 4, (ii) 16, (iii) – 5, (iv) 17, (v) 9, (vi) 2, (vii) $\frac{9}{25}$, (viii)12 (ix) 2, (x) –10

3. (i) 10, (ii) –1, (iii) –26, (iv) $-12\frac{2}{3}$, (v) –2 **4.**(i)$12\frac{1}{6}$, (ii) $\frac{2}{5}$, (iii) –26, (iv) $2\frac{1}{4}$, (v) –10

(ଅନୁଶୀଳନୀ 7 (b))

1. 80, **2.** 72, **3.** 8, **4.** 11, **5.** 15, 16, **6.** 14, **7.** ହମିଦ୍‌ର ଟ.200 ଓ ରହିମ୍‌ର ଟ.150ଙ୍କା ।
8. 36, **9.** 37, **10.** 150, **11.** 20,50; **12.** ପୁଅ–21 ଓ ଝିଅ–28, **13.** 40^0, 50^0, **14.** 5 ଟଙ୍କିଆ 50 ଟି ଓ 10 ଟଙ୍କିଆ 25ଟି, **15.** ପ୍ରସ୍ଥ 25ମି. ଓ ଦୈର୍ଘ୍ୟ 50ମି. **16.** $\frac{9}{12}$ **17.** 70^0 **18.** 4 କି.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ – 7 (c)

1. (i) 0 ଓ 3, (ii) $\frac{5}{2}$ ଓ $-\frac{5}{2}$, (iii) –2 ଓ 2, (iv) $-\frac{4}{3}$ ଓ $\frac{4}{3}$, (v) $-\frac{5}{2}$ ଓ 0(vi) 0 ଓ $\frac{b}{a}$ (vii) –9 ଓ 9, (viii) –27 ଓ 27; **2.** (i) 3 ଓ –1, (ii) 5 ଓ –1, (iii) 5 ଓ –4, (iv) –3 ଓ –4 (v) –7 ଓ 5, (vi) 5 ଓ 1, (vii) –1 ଓ $\frac{3}{2}$, (viii) 1 ଓ $-\frac{5}{3}$, (ix) a ଓ b, (x) –a ଓ b

ଅନୁଶୀଳନୀ – 8 (a)

1. 500ଟଙ୍କା **2.** 16% **3.** 25% **4.** $56\frac{1}{4}$% **5.**$33\frac{1}{3}$% **6.** $5\frac{5}{8}$ଟଙ୍କା **7.**650 ଟଙ୍କା **8.** $6\frac{2}{3}$% **9.**600ଟଙ୍କା ଓ 400ଟଙ୍କା **10.** 500ଟଙ୍କା **11.** 405ଟଙ୍କା **12.** 500 ଟଙ୍କା **13.** ପ୍ରଥମ ଦୋକାନରୁ କିଣିଲେ ଲାଭ ଜନକ । **14.** 400ଟଙ୍କା, **15.** 817.60 ଟଙ୍କା **16.** 40% **17.** 733.33 ଟଙ୍କା

ଅନୁଶୀଳନୀ – 8 (b)

1.(i) 36% (ii) 8ପଇସା (iii) 12.50% (iv) $\frac{25}{4}$% ; **2.** 11,840ଟଙ୍କା **3.** 8700ଟଙ୍କା **4.** 1500ଟଙ୍କା **5.** 1620 ଟଙ୍କା **6.** $\frac{P(9T+25)}{25}$ ଟଙ୍କା **7.** 10ବର୍ଷ **8.** 10,000ଟଙ୍କା **9.** 10% **10.** $6\frac{1}{4}$% **11.** 2000ଟଙ୍କା **12.** $22\frac{1}{2}$ବର୍ଷ **13.** 16ବର୍ଷ, **14.** 8% **15.** 12,958ଟଙ୍କା, **16.** 8%

ଅନୁଶୀଳନୀ – 8 (c)

1. ଟ.133.12ପ. **2.**ଟ1717.35 ପ. **3.**1655ଟ, **4.** 1261ଟ **5.** 6655ଟ **6.** ଟ36,659.70 **7.** 2ବର୍ଷ **8.** ଟ567.45ପ **9.** 3000ଟ **10.** $3070\frac{5}{8}$ଟ **11.** ଟ 1125.21 ପ. **12.** ଟ.103.37ପ **13.** ଟ166116.80ପ **14.** 22898 **15.** 38640 ଟ.

ଅନୁଶୀଳନୀ – 8 (d)

1. 10624 ଟଙ୍କା **2.** 50 ଟଙ୍କା **3.** 9000 ଟଙ୍କା **4.** 147.40; **5.** 129.01 **6.** 400 .20 **7.** 144.07 **8.**120.26 **9.** 122.65 **10.** 140

ଅନୁଶୀଳନୀ - **8 (e)** **1.** 100 ଟଙ୍କା; **2.** 1000 ଟଙ୍କା; **3.** ଦୁଇଥର **4.** (a)5ଟଙ୍କା; (b) କିଛି ସୁଧ ପାଇବ ନାହିଁ; **5.** (i) Nil, (ii) ଟ 22.92, (iii) 22.92; **6.** 127 ଟଙ୍କା; **7.** 17.09 ଟଙ୍କା; **8.** 144.58 ଟଙ୍କା; **9.** 4.5%; **10.** 293.00; **11.** 42.43 ଟଙ୍କା; **12.** 6%

ଅନୁଶୀଳନୀ - 9 (a) **1.** x (କମଳାର ସଂଖ୍ୟା) : 8 4 18 10 13

y (କମଳାର ସଂଖ୍ୟା) : 18 14

2. (a) (i) 60 ଟଙ୍କା (ii) 5 ଟି, (b) (i) 700 ଟଙ୍କା (ii) 6 ଦିନ, **3.** 15 ଟି **4.** 225 ଟଙ୍କା, 5 ଟି, **5.** 22.50 ଟଙ୍କା, 6 କି.ଗ୍ରା., **6.** 320 କି.ମି., 5 ଘଣ୍ଟା, **7.** 7.50 ଟଙ୍କା; 8 ଟି, **8.** 12 ଟଙ୍କା; **9.** 5 ଲିଟର; **10.** 4200 ଟଙ୍କା, **11.** 720 ଟଙ୍କା, **12.** 150 ଟି, 108 ଟଙ୍କା

ଅନୁଶୀଳନୀ - 9 (b) **1.** (i) ସଳଖ ଚଳନ (ii) ସଳଖ ଚଳନ ଅବଶିଷ୍ଟ ପ୍ରତିଲୋମୀ ଚଳନ

2. x : 10, 40; y : 8 4; k; 120 120 120 120 120 **3.** (i) ପ୍ରତିଲୋମୀ, (ii) ସଳଖ, (iii) ସଳଖ, (iv) ପ୍ରତିଲୋମୀ, **4.** 1 ବ.ମି., **5.** 12 ଜଣ, **6.** 6 ଟି, **7.** 12 ଦିନ, **8.** 25 ଟି, **9.** 1 : 2 : 3, **10.** 6 ଦିନ, **11.** 20 ଏକର, **12.** 10 ମିନିଟ୍, 2 କି.ମି.

ଅନୁଶୀଳନୀ - 9 (c) **1.** 6 ଦିନ, **2.** 20 ଦିନ, **3.** 20 ଦିନ, **4.** 10 ଦିନ, **5.** 324 ମିଟର, **6.** 8 ଜଣ, **7.** 10 ଘଣ୍ଟା, **8.** 27 ଦିନ

ଅନୁଶୀଳନୀ - 10 (a) **4.** (a) 11 am. (b) 5 am (c) 11 am (d) 20°C (e) 40°C **5.** (a) 40, 45, (b) 50-55, (c) 16, (d) 40-45, (e) 5; **7.** (a) 120 (b) 90 (c) 5.4 (d) 90; **8.**(a) 270, 360, (b) 135, 135, (c) 180, (d) 135

ଅନୁଶୀଳନୀ - 10 (b) **1.** x- ଅକ୍ଷ (b) y- ଅକ୍ଷ (c) (0,0) (d) y- ଅକ୍ଷ, (e) x- ଅକ୍ଷ (f) 0, (g) 0, (h) 3 (i) 1 (j) C (3,0)